

GEOMATIQUE

LA THÉORIE DES GRAPHS

Cours Ingénieur 1ère année

Table des matières



Avertissement et Domaines d'application..... 7

Chapitre I. Définitions de base..... 9

Partie A. "Deux définitions indissociables" pour les graphes.....	9
1. Définition "intuitive" d'un graphe.....	9
2. Définition mathématique d'un graphe.....	11
Partie B. Ordre, orientation et multiplicité.....	11
1. Ordre.....	11
2. Orientation.....	11
3. Multiplicité.....	13
Partie C. Relations entre les éléments d'un graphe.....	15
1. Relations entre sommets.....	15
2. Relations entre arcs et sommets.....	16
3. Qualificatifs des graphes.....	17
Partie D. Matrices associées à un graphe.....	20
1. Matrice d'incidence sommet-arc.....	20
2. Matrice d'adjacence ou d'incidence sommets-sommets.....	21
3. Forme condensée des matrices creuses.....	21
Partie E. Vocabulaire lié à la connexité.....	22
1. Chaîne, chemin, longueur.....	22
2. Connexité.....	23
3. Cycle et circuit.....	24
4. Cocycle et cocircuit.....	25

Chapitre II. Cycles..... 29

Partie A. Nombres cyclomatique et cocyclomatique.....	29
1. Décomposition des cycles et des cocycles en sommes élémentaires.....	29
2. Lemme des arcs colorés (Minty 1960).....	30

3. Base de cycles et base de cocycles.....	32
Partie B. Planarité.....	33
1. Graphe Planaire.....	33
2. Formule d'Euler.....	34
3. Théorème de Kuratowski (1930).....	35
4. Graphe Dual.....	36
Partie C. Arbre, forêt et arborescence.....	37
1. Définitions.....	37
2. Propriétés.....	39
3. Arbre maximal (ou couvrant).....	39

Chapitre III. Flots..... 41

Partie A. Définitions.....	41
Partie B. Recherche d'un flot maximum dans un réseau de transport.....	42
1. Définition.....	42
2. Théorème de Ford-Fulkerson.....	42
3. Algorithme de Ford-Fulkerson.....	44
Partie C. Recherche d'un flot compatible.....	45
Partie D. Application à la h-connexité.....	46
Partie E. Application aux couplages.....	46

Chapitre IV. Problèmes de cheminement..... 49

Partie A. Classification des problèmes mathématiques.....	49
Partie B. Recherche des composantes connexes.....	50
1. Présentation des objectifs.....	50
2. Algorithme de Trémaux-Tarjan.....	50
Partie C. Recherche du plus court chemin.....	52
1. Présentation des conditions.....	52
2. Algorithme de Moore-Dijkstra.....	52
Partie D. Recherche d'un arbre de poids extrémum.....	53
1. Présentation des objectifs.....	53
2. Algorithme de Kruskal 1956.....	54

Chapitre V. Problèmes Hamiltonien et Eulérien..... 55

Partie A. Problème Hamiltonien.....	55
1. Définitions.....	55
2. Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien.....	56

3. Condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien.	56
4. Condition suffisante d'existence d'un cycle hamiltonien.	58
Partie B. Problème Eulérien.	58
1. Définitions.	59
2. Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une chaîne eulérienne.	59
3. Algorithme local pour tracer un cycle eulérien.	59
4. Lien entre problème eulérien et hamiltonien.	60
Chapitre VI. Coloration.	61
Partie A. Définitions.	61
Partie B. Coloration des sommets.	61
Partie C. Coloration des arêtes.	62
Partie D. Propositions.	62
Partie E. Le théorème des "4 couleurs".	62
Partie F. Graphe parfait.	63
Chapitre VII. Graphe d'intervalles et graphe triangulé.	65
Partie A. Définitions.	66
Partie B. Propriétés.	66
Chapitre VIII. Hypergraphe.	69
Partie A. Définitions.	69
Partie B. Un exemple d'application : la méthode HBDS.	70
Chapitre IX. Formulaire.	73
Partie A. Formulaire.	73
Bibliographie.	77
Signification des sigles.	79

Avertissement et Domaines d'application

Avertissement



Le vocabulaire employé

Tous les ouvrages concernant la théorie des graphes se heurtent à un problème de vocabulaire...

En effet, selon ses préoccupations, l'auteur est enclin à mettre en exergue soit l'aspect mathématique de la théorie des graphes, soit son aspect représentation figurative. Ainsi on rencontre plusieurs appellations pour le même élément, la même caractéristique ou la même relation. De plus, l'orientation d'un graphe n'est pas nécessaire pour l'étude de toutes les propriétés. Les différents auteurs ont donc choisi des termes pour décrire les mêmes propriétés dans un cas ou dans l'autre.

On est donc confronté à un vocabulaire composé de mots ayant un sens générique et d'autres un sens plus spécifique. Pour rendre plus clair cette présentation de la théorie des graphes, j'ai donc choisi de garder le vocabulaire employé par C.Berge et de préciser pour chaque définition les limites de son application dans ce document.



Les limites de ce document

Ce document n'est pas un traité sur la théorie des graphes mais une présentation. Certains résultats ou phénomènes seront donc omis. De même, seuls seront fournis les démonstrations et les algorithmes les plus intéressants d'un point de vue pédagogique. Je préciserai autant que faire ce peut, où trouver tel ou tel complément d'informations.

Domaines d'application de la théorie des graphes

Les graphes (et par conséquent la théorie des graphes) sont utilisés dans de nombreux domaines. On peut donner quelques exemples :

- ◆ les réseaux de communication : réseaux de routes représentés par une carte routière, réseaux de chemin de fer, de téléphone, de relais de télévision, réseaux électriques, réseaux des informations dans une organisation, etc... ;
- ◆ la gestion de la production : graphes potentiels-étapes plus connu sous le nom de graphes PERT ["Programme Evaluation and Research Task" ou "Programme Evaluation Review Technique"] ;
- ◆ l'étude des circuits électriques : Kirchhof, qui a étudié les réseaux électriques, peut être considéré comme un des précurseurs de cette théorie ;
- ◆ la chimie, la sociologie et l'économie : la notion de clique est un exemple de l'implication de la théorie des graphes dans ces disciplines.

Définitions de base

Partie A. "Deux définitions indissociables" pour les graphes

Comme on vient de le préciser au § "Avertissement", un graphe peut être défini de manière "intuitive" ou mathématique. Ces deux aspects sont indissociables et donnent les deux définitions suivantes (empruntées à C. Berge) :

1. Définition "intuitive" d'un graphe



"Un *graphe* est un schéma constitué par un ensemble (ici supposé *fini* [*]) de *points* et par un ensemble de *flèches* reliant chacune deux de ceux-ci. Les points sont appelés les *sommets* du graphe, et les flèches les *arcs* du graphe."

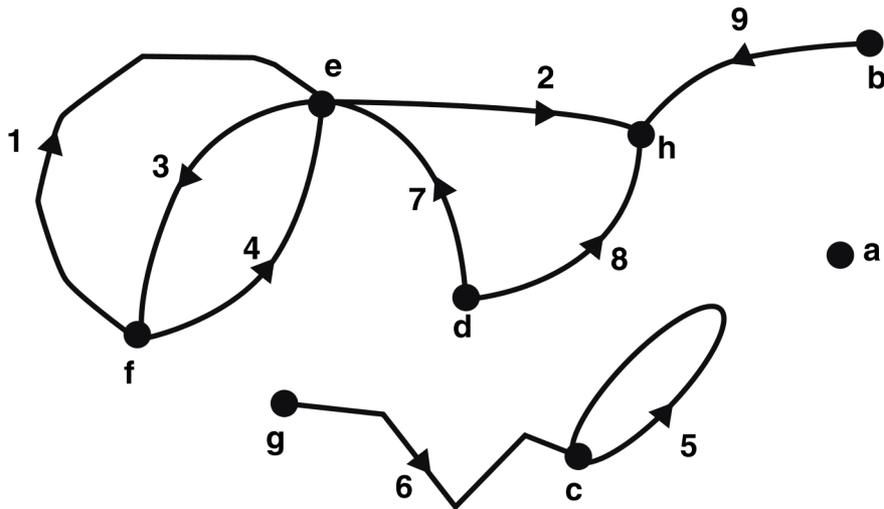
[* Dans ce document, on s'intéressera principalement aux graphes finis bien que de nombreuses notions puissent être généralisées]



Exemple

Dans le graphe ci-après, on a :

- ♦ un ensemble de sommets : $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- ♦ un ensemble d'arcs :

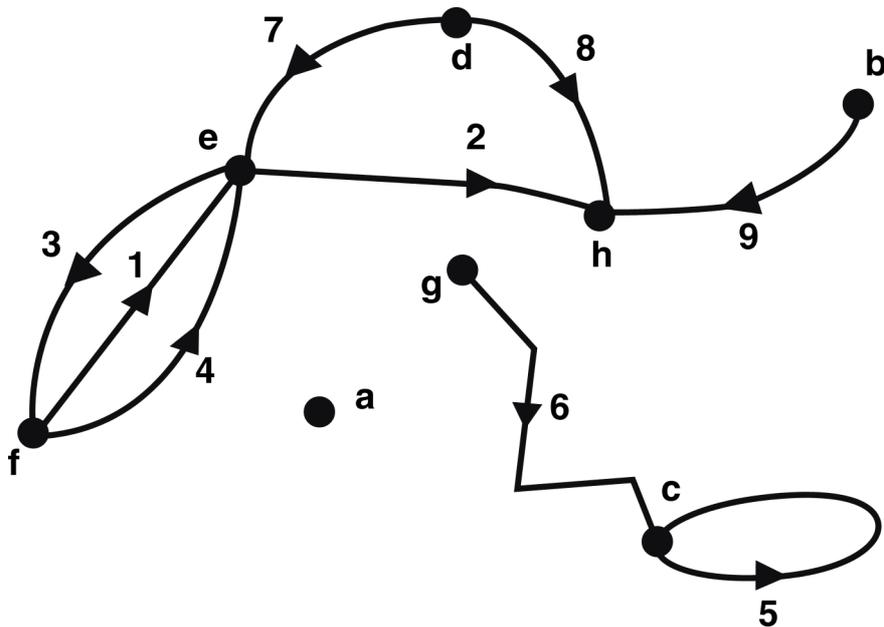


▲ SCH. 1 : UN EXEMPLE DE GRAPHE



Remarque

"La position des sommets et la forme des arcs sur une figure n'importe pas ; seul importe de savoir comment les sommets sont reliés". Les graphes des graphes 1 et ci-après sont dits *isomorphes*.



▲ SCH. 2 : UN GRAPHE ISOMORPHE AU GRAPHE DE LA FIGURE PRÉCÉDENTE

Notation :

L'arc 3 va du sommet e au sommet f . On dit qu'il est de la *forme* (e, f) et on écrit par *convention* que $3 = (e, f)$. On remarque que si la forme (g, c) suffit pour désigner l'arc 6 de manière univoque, la forme (f, e) ne suffit pas pour désigner l'arc 1 uniquement car $4 = (f, e)$ également.

2. Définition mathématique d'un graphe



"Un *graphe* $G = (X, U)$ est le couple constitué :

1. par un *ensemble* $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

2. par une *famille* $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ d'éléments du produit cartésien $X \times X = \{(x, y) / x \in X, y \in X\}$

Partie B. Ordre, orientation et multiplicité

1. Ordre

Selon les définitions précédentes, l'ensemble de sommets est supposé fini.

**Ordre du graphe**

On appelle *ordre du graphe* $G = (X, U)$ le nombre de sommets du graphe.

Notation

L'ordre de G est donc le *cardinal de* X et noté $|X|$.

**Exemple**

Le graphe de la figure "un exemple de graphe" est d'ordre 8.

2. Orientation

2.1. Arête

Selon C. Berge, les premiers mathématiciens [1] qui se sont intéressés aux graphes considéraient des graphes non orientés. Il n'y a en fait qu'une "espèce" de graphes et une seule théorie. Par contre, certaines propriétés ne sont pas directement concernées par l'*orientation* [2] des arcs. Dans ce cas, on ne parle plus d'arc mais d'*arête* du graphe.

[1 - On peut citer par exemple : D. König, P. Erdős, P. Turan, T. Gallai ou G. Hajos.]

[2 - La "direction" indiquée par le sens de la flèche.]



Arête

Une *arête* est un ensemble de sommets (ensemble de cardinalité 1 ou 2). Une arête est donc un élément de $P_2(X)$ (l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble X).

Notation

La notation $\{x, y\}$ (pour $x \neq y$) pourrait être employée mais il faudrait écrire $\{x\}$ (pour $x = y$).

Soit un graphe $G = (X, U)$, on notera donc les arêtes sous la forme $[x, y]$ (avec $x \in X$ et $y \in X$).

2.2. Multigraphe



Graphe non orienté

Un "graphe non orienté" sera appelé un *multigraphe* et noté $G = (X, E)$ avec $E \subset P_2(X)$.

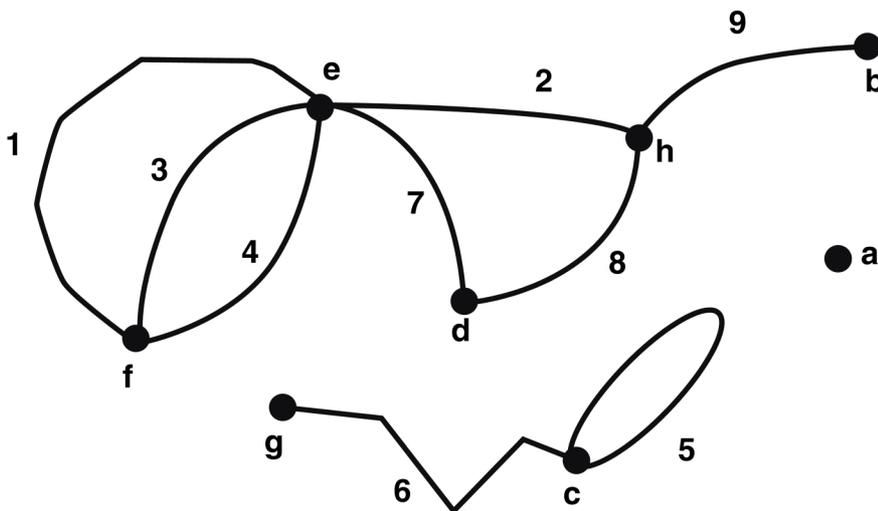


Remarque

Dans un multigraphe, il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux sommets.

Convention

Pour appliquer un concept orienté dans un multigraphe $G = (X, E)$, on considérera en fait le *graphe orienté associé*, obtenu en orientant chaque arête dans les deux sens. Réciproquement, un concept non orienté pourra être appliqué à un graphe (orienté) $G = (X, U)$ en omettant l'orientation des arcs.



▲ SCH. 3 : MULTIGRAPHE ASSOCIÉ AU GRAPHE DE L'IMAGE 1

3. Multiplicité

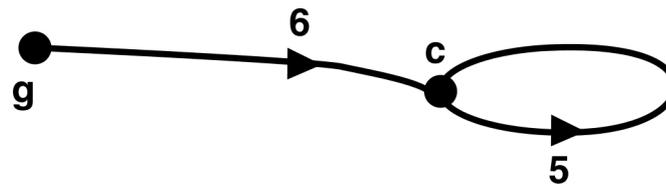
3.1. Boucle et extrémités



Boucle et extrémités

Un arc de la forme (x, x) est une *boucle*. Soit un arc de la forme (x, y) , x et y sont appelés les *extrémités* de l'arc :

- ◆ x est l'*extrémité initiale* de l'arc ;
- ◆ y est l'*extrémité finale* de l'arc.



L'arc 5 = (c, c) est une boucle,
g est l'extrémité initiale de 6 et c son extrémité finale

▲ SCH. 4 : UN EXEMPLE DE BOUCLE ET D'EXTRÉMITÉS

3.2. Multiplicité d'une paire x, y



Multiplicité d'une paire x, y

La *multiplicité d'une paire* x, y est le nombre d'arcs (du graphe G) ayant x comme extrémité initiale et y comme extrémité finale.

Notation

La multiplicité d'une paire x, y est notée : $m_G^+(x, y)$.

On pose $m_G^-(x, y) = m_G^+(y, x)$ et $m_G(x, y) = m_G^+(x, y) + m_G^-(x, y)$.

Si $x \neq y$ alors $m_G(x, y)$ est le nombre d'arcs ayant une extrémité en x et une en y .

Si $x=y$ alors $m_G(x, y)$ vaut deux fois le nombre de boucles en x .

Convention

Si A et B sont deux sous ensembles de X , on note également :

$$m_G^+(A, B) = \left| \left\{ u/u \in U, u = (x, y), x \in A \text{ et } y \in B \right\} \right|$$

et

$$m_G(A, B) = m_G^+(A, B) + m_G^-(A, B)$$

3.3. *p*-graphe



p-graphe

Soit un graphe $G = (X, U)$, si le nombre d'arcs qui va d'un sommet x à un sommet y de X est inférieur ou égal à p (pour tous les sommets x et y de X) alors on dit que G est un p -graphe.

Notation

$G = (X, U)$ est un p -graphe $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in X^2, |\{u \in U / u = (x, y)\}| \leq p$



Exemple

Le graphe de la figure "un exemple de graphe" est un 2-graphe ($m_G^+(f, e) = 2$).

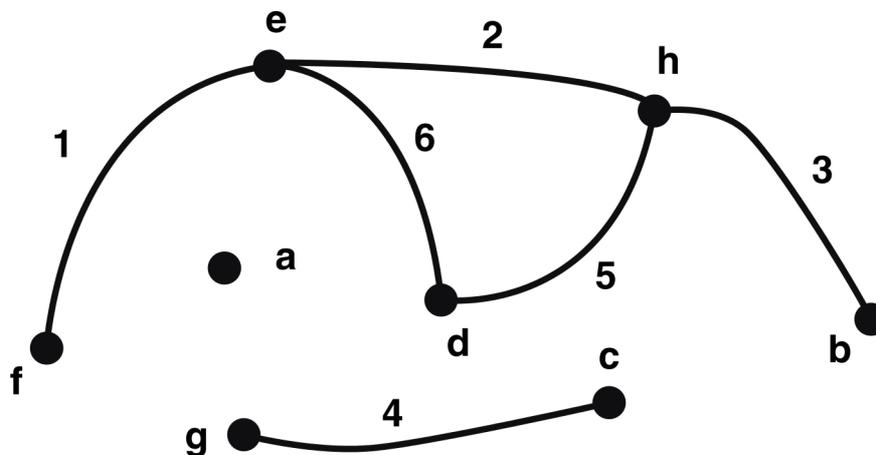
3.4. Graphe simple



Graphe simple

Un *graphe simple* est un multigraphe :

- ◆ sans boucles ;
- ◆ tel qu'il n'y ait jamais plus d'une arête entre deux sommets quelconques



▲ SCH. 5 : UN EXEMPLE DE GRAPHE SIMPLE

Partie C. Relations entre les éléments d'un graphe

1. Relations entre sommets

1.1. Sommets voisins



Le sommet y est un *successeur* du sommet x s'il existe un arc de la forme :
 (x, y)

Le sommet y est un *prédécesseur* du sommet x s'il existe un arc de la forme :
 (y, x)

Le sommet y est un *voisin* du sommet x s'il existe un arc de la forme (x, y) ou de la forme (y, x) (autrement dit si y est un successeur ou un prédécesseur de x).

Un *sommet pendant* est un sommet qui n'a qu'un seul voisin.

Notation

L'ensemble des successeurs du sommet x est noté : $\Gamma^+(x)$

L'ensemble des prédécesseurs du sommet x est noté : $\Gamma^-(x)$

L'ensemble des voisins du sommet x est noté : $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$

Convention

On utilise aussi le terme de *sommets adjacents* pour parler de sommets voisins.



Exemple

Dans le graphe de la figure "un exemple de graphe" :
 $\Gamma(e) = \Gamma^+(e) \cup \Gamma^-(e) = \{f, h\} \cup \{f, d\} = \{f, d, h\}$

1.2. Sommet adjacent à un ensemble de sommets



Sommet adjacent à un ensemble de sommets

Soit $A \subset X$, si $x \in X$, $x \notin A$, et si $x \in \Gamma_G(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma_G(a)$ alors on dit que x est un *sommet adjacent à l'ensemble A* .



Exemple

Dans le graphe de la figure "un exemple de graphe", si on définit l'ensemble A comme suit : $A = \{d, e, h\} \subset X$ alors b est adjacent à A car $b \in X$, $b \notin A$ et $b \in \Gamma_G(h)$.

1.3. Degré d'un sommet



Degré d'un sommet

Soit un sommet x d'un graphe G , le nombre d'arcs de la forme (x, y) se note $d_G^+(x)$ et s'appelle le *demi-degré extérieur* de x . De même, le nombre d'arcs de la forme (y, x) se note $d_G^-(x)$ et s'appelle le *demi-degré intérieur* de x .

Le nombre $d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$ est le *degré* du sommet x , c'est le nombre d'arcs ayant une extrémité en x (chaque boucle étant comptée deux fois).

Si tous les sommets d'un graphe ont même degré, ce graphe est un *graphe régulier*.



Remarque

On peut remarquer que

$$d_G^+(x) = \sum_{\forall y \in X} m_G^+(x, y) \quad \text{et} \quad d_G^-(x) = \sum_{\forall y \in X} m_G^-(x, y)$$

Par conséquent, on a $d_G^+(x) \geq |\Gamma^+(x)|$ et $d_G^-(x) \geq |\Gamma^-(x)|$ (dans le cas d'un 1-graphe, il y a égalités).



Exemple

Dans le graphe de la figure "un exemple de graphe" :

$$d_G(e) = d_G^+(e) + d_G^-(e) = 2 + 3 = 5$$

Ce graphe n'est pas *régulier* car par ailleurs :

$$d_G(c) = d_G^+(c) + d_G^-(c) = 1 + 2 = 3$$

2. Relations entre arcs et sommets

2.1. Arc incident à un sommet



Arc incident à un sommet

Si un sommet x est l'extrémité initiale d'un arc $u = (x, y)$ alors u est un *arc incident au sommet x vers l'extérieur*. Si par contre, x est l'extrémité finale d'un arc $u = (y, x)$ alors l'arc u est un *arc incident au sommet x vers l'intérieur*. Dans les deux cas, on dit que l'arc u est un *arc incident au sommet x* .

Convention

On utilise également l'appellation *arc entrant* pour incident vers l'intérieur et *arc sortant* pour incident vers l'extérieur. Un *arc pendant* est incident à un sommet pendant.

2.2. Arc incident à un ensemble



Arc incident à un ensemble

Soit $A \subset X$, si l'extrémité initiale d'un arc u appartient à A mais pas son extrémité finale alors on dit que u est un *arc incident à l'ensemble A vers l'extérieur*. Par contre, si l'extrémité finale d'un arc u appartient à A mais pas son extrémité initiale alors on dit que u est un *arc incident à l'ensemble A vers l'intérieur*.

Notation

Si u est incident à l'ensemble A vers l'extérieur alors on note : $u \in \omega^+(A)$.

Si u est incident à l'ensemble A vers l'intérieur alors on note : $u \in \omega^-(A)$

L'ensemble des arcs incidents à l'ensemble A est noté : $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$



Exemple

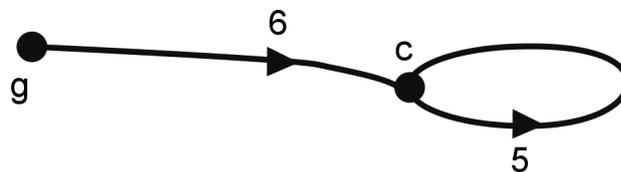
Dans le graphe de la figure "un exemple de graphe", si on définit l'ensemble A comme suit : $A = \{ d, e, h \} \subset X$ alors

$$\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A) = \{ 3 \} \cup \{ 1, 4, 9 \} = \{ 1, 3, 4, 9 \}$$

2.3. Arcs adjacents



Deux arcs sont dits adjacents s'ils ont au moins un sommet commun (une extrémité commune).



L'arc 5 et l'arc 6 sont adjacents car c est un sommet commun

▲ SCH. 6 : DEUX ARCS ADJACENTS

3. Qualificatifs des graphes

3.1. Sous-graphe partiel



Soit un graphe $G = (X, U)$ quelconque.

Soit $A \subset X$, alors le *sous graphe engendré par A* est le graphe G_A dont les sommets sont les éléments de A et dont les arcs sont les arcs de G ayant leurs deux extrémités dans A .

Soit $V \subset U$ alors le *graphe partiel engendré par V* est le graphe (X, V) ayant le même ensemble X de sommets que G , et dont les arcs sont les arcs de V (on

élimine de G les arcs de $U - V$).

Un *sous-graphe partiel* de G est un sous-graphe d'un graphe partiel de G ou un graphe partiel d'un sous-graphe de G .



Exemple

Le graphe de la figure "deux arcs adjacents" est un *sous-graphe* du graphe de la figure "un exemple de graphe".



▲ SCH. 7 : UN GRAPHE PARTIEL DU GRAPHE DE LA FIGURE 6

Le graphe de la figure "un graphe partiel du graphe de la figure 6" est un *graphe partiel* du graphe de la figure 6 qui est lui-même un sous-graphe du graphe de la figure 1. Donc le graphe de la figure 7 est un sous-graphe partiel du graphe de la figure 1.

3.2. Graphe symétrique ou antisymétrique



Un graphe est *symétrique* si pour toute paire de sommets x et y , il existe autant d'arcs de la forme (x, y) que d'arcs de la forme (y, x) . Un graphe est *antisymétrique* si pour tout arc de la forme (x, y) , il n'existe pas d'autre arc de la forme (x, y) ou de la forme (y, x) .

Notation

$G = (X, U)$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in X^2, m_G^+(x, y) = m_G^-(x, y)$

$G = (X, U)$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in X^2, m_G^+(x, y) + m_G^-(x, y) \leq 1$ (c'est donc un 1-graphe).



Remarque

Un 1-graphe est symétrique si et seulement si $(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U$.

Un 1-graphe est antisymétrique si et seulement si $(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U$.

Un 1-graphe *antisymétrique* considéré *sans son orientation* est un *graphe simple* et réciproquement.

3.3. Graphe complet, clique



Un graphe est *complet* si pour toute paire de sommets x et y et y , il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou de la forme (y, x) .

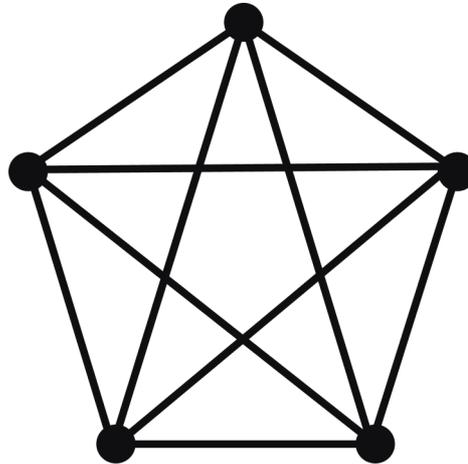
Un graphe simple complet d'ordre n s'appelle une *n-clique*.

Notation

$G = (X, U)$ est complet $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in X^2, x \neq y, m_G^+(x, y) + m_G^-(x, y) \geq 1$

Une n -clique se dénote K_n [1]

[1 En hommage à Kuratowski.].



▲ SCH. 8 : LA 5-CLIQUE K_5 , GRAPHE SIMPLE COMPLET D'ORDRE 5

3.4. Graphe biparti, biparti-complet



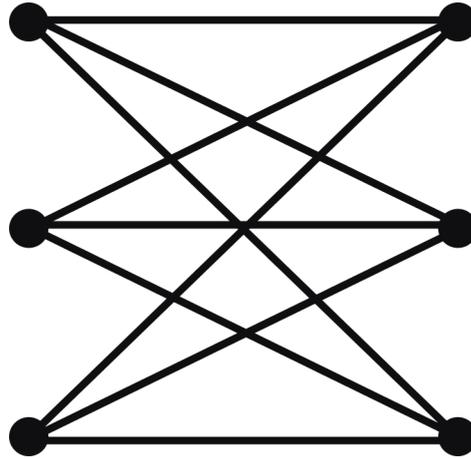
Un graphe est *biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes X_1 et X_2 de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais voisins.

Soit un graphe biparti, si pour tout $x_1 \in X_1$ et pour tout $x_2 \in X_2$, on a $m_G(x_1, x_2) \geq 1$, alors le graphe est *biparti complet*.

Notation

Un graphe biparti peut être noté $G = (X_1, X_2, U)$

Un graphe simple biparti-complet avec $|x_1| = p$ et $|x_2| = q$ est noté $K_{p,q}$.



▲ SCH. 9 : GRAPHE BIPARTI COMPLET $K_{3,3}$

Partie D. Matrices associées à un graphe

1. Matrice d'incidence sommet-arc



La *matrice d'incidence sommets-arcs* d'un graphe $G = (X, U)$ sans boucle est une matrice telle que chaque colonne correspond à un arc de G et chaque ligne à un sommet de G ; si $u = (i, j) \in U$, la colonne u a tous ses termes nuls, sauf :

$$\begin{cases} a_{iu} = +1 \\ a_{ju} = -1 \end{cases}$$

Si on considère une ligne correspondant au sommet i alors on retrouve aisément l'ensemble des arcs incidents au sommet i :

$$\begin{cases} \omega^+(i) = \{ u / a_{iu} = +1 \} \\ \omega^-(i) = \{ u / a_{iu} = -1 \} \end{cases}$$



Exemple

On donne comme exemple la matrice d'incidence sommets-arcs du *graphe partiel sans boucle* engendré par l'ensemble des arcs du graphe de la figure 1 privé de l'arc 5 (la boucle) :



Exemple

<p>La forme condensée de la matrice d'incidence sommets du graphe de la figure 1 est la suivante :</p>	x	y	$m^+(x,y)$	<p>Les arcs de la figure 1 étant numérotés de 1 à 9, on peut écrire la matrice SIF :</p>	Arc	Si	Sf
	b	h	1		1	f	e
	c	c	1		2	e	h
	d	e	1		3	e	f
	d	h	1		4	f	e
	e	f	1		5	c	c
	e	h	1		6	g	c
	f	e	2		7	d	e
	g	c	1		8	d	h
					9	b	h

▲ TAB. 1

Partie E. Vocabulaire lié à la connexité

1. Chaîne, chemin, longueur



Une *chaîne* de longueur $q > 0$ est une séquence $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_q)$ d'arcs de G telle que chaque arc de la séquence est une extrémité en commun avec l'arc précédent, et l'autre extrémité en commun avec l'arc suivant. Le nombre d'arcs de la séquence est la *longueur de la chaîne*.

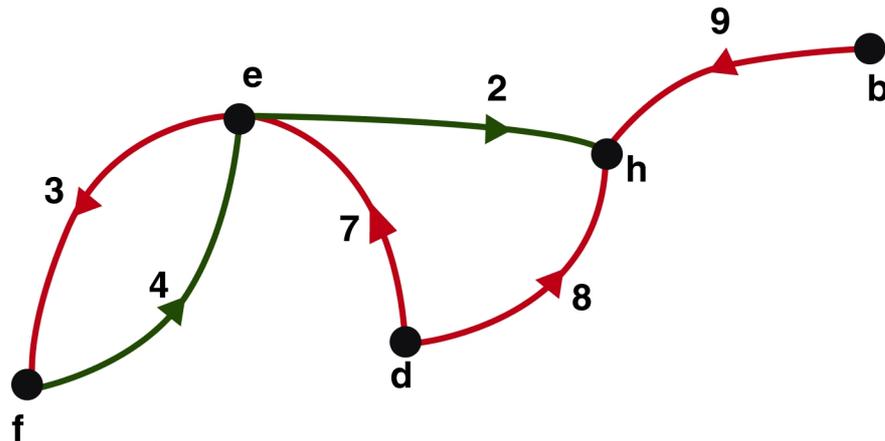
Une *chaîne élémentaire* est une chaîne ne rencontrant pas deux fois le même sommet.

Une *chaîne simple* est une chaîne n'utilisant pas deux fois le même arc.

Un *chemin* de longueur $q > 0$ est une chaîne telle que pour tout $i < q$ l'extrémité finale de u_i coïncide avec l'extrémité initiale de u_{i+1} (en d'autres termes, u_{i+1} est un successeur de u_i).

Notation

Dans un *1-graphe*, un chemin est entièrement déterminé par la succession des sommets. On peut donc, dans ce cas, utiliser la notation $\mu = ((x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots)$ ou la notation $\mu = [x_1, x_2, x_3, \dots]$.



(3, 7, 8, 9) est une chaîne de longueur 4

(4, 2) est un chemin de longueur 2

▲ SCH. 10 : UN EXEMPLE DE CHAÎNE ET DE CHEMIN

2. Connexité



Un *graphe connexe* est un graphe tel que pour toute paire de sommets x et y , il existe une chaîne reliant x et y .

La relation " $x = y$ ou $x \neq y$ et il existe une chaîne reliant x et y " est une relation d'équivalence (notée $x \equiv y$) car :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x \equiv x & \text{(reflexivité)} \\ x \equiv y \Rightarrow y \equiv x & \text{(symétrie)} \\ x \equiv y \text{ et } y \equiv z \Rightarrow x \equiv z & \text{(transitivité)} \end{array} \right.$$

Les classes d'équivalences de cette relation sont appelées les *composantes connexes* du graphe. Le *nombre de connexité* du graphe est simplement le nombre de composantes connexes.

On appelle *ensemble d'articulation* $A \subset X$ d'un graphe connexe G , un ensemble de sommets tel que le sous-graphe G_{X-A} , déduit de G par suppression des points de A , ne soit plus connexe. Un *point d'articulation* d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de connexité. Un *isthme* est une arête dont la suppression augmente également le nombre de connexité.

Un graphe est dit *k-connexe* s'il est connexe d'ordre $N \geq k + 1$ et n'admet pas d'ensemble d'articulation de cardinal $k - 1$. De même un multigraphe est *k-arête-connexe* s'il ne peut être déconnecté par l'élimination de moins de k arêtes.



Exemple

Le graphe exemple dans la partie "définition intuitive d'un graphe" n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne reliant f et g . Il possède trois composantes connexes : $\{ a \}$, $\{ f, e, d, h, b \}$ et $\{ g, c \}$.

Dans le graphe de la partie "Chaîne, chemin, longueur", les sommets e et h sont des points d'articulation. L'arc 9 est un isthme.

3. Cycle et circuit



Un *pseudo-cycle* est une chaîne dont les deux extrémités coïncident, le même arc pouvant être utilisé plusieurs fois.

Un *cycle* est une chaîne telle que :

- ◆ le même arc ne figure pas deux fois dans la séquence ;
- ◆ les deux sommets aux extrémités de la chaîne coïncident.

Un *cycle élémentaire* est un cycle ne rencontrant pas deux fois le même sommet (excepté le sommet initial qui coïncide nécessairement avec le sommet final).

Un *circuit* est un cycle $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_q)$ tel que pour tout $i < q$ l'extrémité finale de u_i coïncide avec l'extrémité initiale de u_{i+1} (en d'autres termes, u_{i+1} est un successeur de u_i).

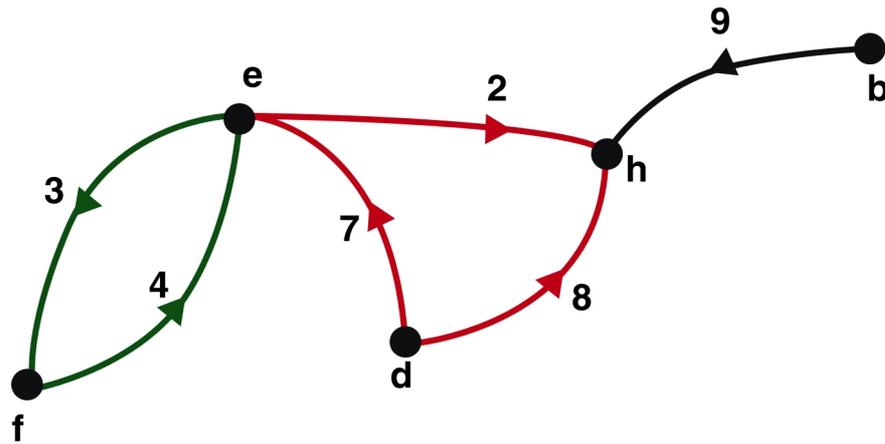
Notation

On désigne par μ^+ l'ensemble des arcs du cycle orientés dans le sens de parcours et par μ^- l'ensemble des autres arcs du cycle.

Si les arcs sont numérotés $1, 2, \dots, m$ on peut faire correspondre à tout cycle un vecteur $R^m \vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ de avec :

$$\mu_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \mu^+ \cup \mu^- \\ +1 & \text{si } i \in \mu^+ \\ -1 & \text{si } i \in \mu^- \end{cases}$$

Dans le cas d'un 1-graphe, un circuit est entièrement déterminé par la succession des sommets. On peut donc, dans ce cas, utiliser la notation $\mu = ((x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots)$ ou la notation $\mu = [x_1, x_2, x_3, \dots]$.



(7, 2, 8) est un cycle de longueur 3

(4, 3) est un circuit de longueur 2

▲ SCH. 11 : UN EXEMPLE DE CYCLE ET DE CIRCUIT

Convention

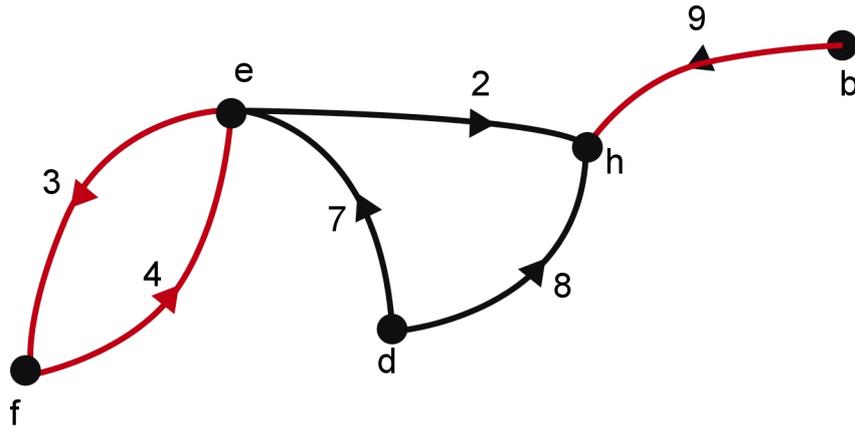
Par la suite, on confondra un cycle ou un circuit avec son vecteur associé et on parlera de somme de cycles ou de circuits. On oubliera la notation $\vec{\mu}$ au profit de la notation μ .

4. Cocycle et cocircuit

Soit $A \subset X$, l'ensemble des arcs incidents à l'ensemble A est noté :
 $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$ (Cf. § arc incident).

Un *cocycle* est un ensemble d'arcs de la forme $\omega(A)$ non vide et partitionné en deux classes $\omega^+(A)$ et $\omega^-(A)$.

Un *cocircuit* est un cocycle, $\omega(A) = \omega^+(A)$ ou $\omega(A) = \omega^-(A)$, dans lequel tous les arcs sont orientés dans le même sens soit vers l'extérieur de A , soit vers l'intérieur.



$\{ 3 \} \cup \{ 4, 9 \}$ est un cocycle avec $A = \{ e, d, h \}$

$\{ 9 \}$ est un cocircuit avec $A' = \{ e, d, h, f \}$

▲ SCH. 12 : UN EXEMPLE DE COCYCLE ET DE COCIRCUIT

Un *cocycle élémentaire* est un cocycle constitué par l'ensemble des arcs reliant entre eux deux sous graphes connexes A_1 et A_2 avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \neq \emptyset \text{ et } A_2 \neq \emptyset \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 = C \end{array} \right.$$

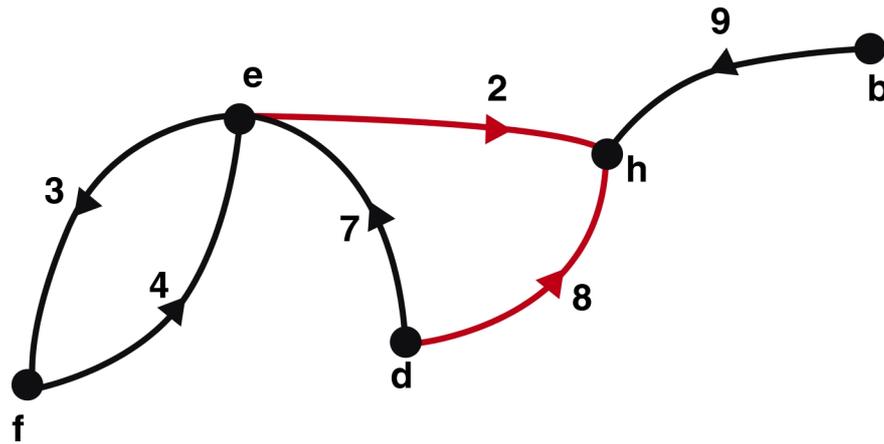
où C est une composante connexe.



Remarque

On posera généralement $A_2 = C - A_1$.

Contrairement à la matrice d'incidence sommets-arcs les boucles peuvent être représentées grâce à cette matrice..



(2, 8) est un cocycle élémentaire

avec $A1 = \{ e, d, f \}$ et $A2 = \{ b, h \}$

▲ Sch. 13 : UN EXEMPLE DE COCYCLE ET DE COCIRCUIT

Notation

On fait correspondre à tout cocycle un vecteur de R^m , $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$, avec :

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \omega(A) \\ +1 & \text{si } i \in \omega^+(A) \\ -1 & \text{si } i \in \omega^-(A) \end{cases}$$

Convention

Par la suite, on confondra un cocycle ou un cocircuit avec son vecteur associé et on parlera de somme de cocycles ou de cocircuits. On oubliera la notation $\vec{\omega}$ au profit de la notation ω .

Cycles

Partie A. Nombres cyclomatique et cocyclomatique

1. Décomposition des cycles et des cocycles en sommes élémentaires

**Conseil**

"Tout cycle est une somme de cycles élémentaires sans arcs communs"

Démonstration

Il suffit de parcourir le cycle et de définir un cycle élémentaire chaque fois qu'un même sommet est rencontré.

**Conseil**

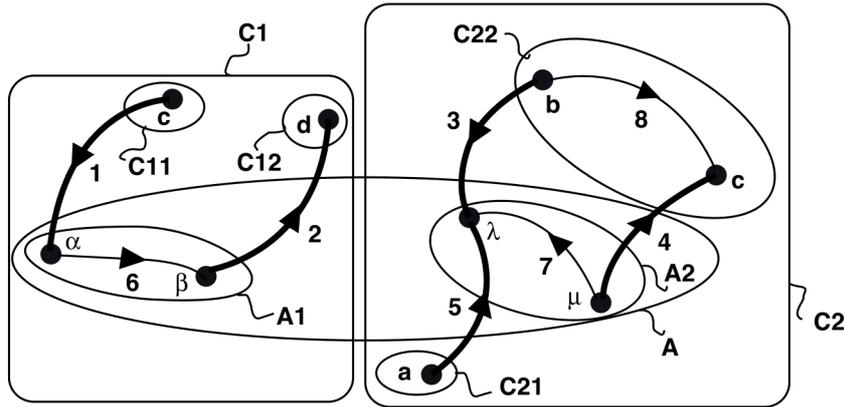
"Tout cocycle est une somme de cocycles élémentaires sans arcs communs"

Démonstration

Soit un cocycle ω , alors $\exists A \subset X$ tel que $\omega = \omega(A)$ et $A \neq \emptyset$. Soient A_1, A_2, \dots, A_k les composantes connexes du sous graphe engendré par A , alors $\omega(A) = \sum_{1 \leq i \leq k} \omega(A_i)$ et

les $\omega(A_i)$ sont deux à deux disjoints.

Soit C_i la composante connexe de G contenant A_i . Soient C_1, C_2, \dots, C_j les composantes connexes du sous graphe engendré par $C_i - A_i$. On a alors $\omega(A_i) = \sum_{1 \leq q \leq j} (-\omega(C_{iq}))$ avec $-\omega(C_{iq})$ cocycle élémentaire car ensemble des arcs reliant deux sous graphes connexes : C_{iq} et $A_i \cup C_{i1} \cup \dots \cup C_{iq-1} \cup C_{iq+1} \dots \cup C_{ij}$; en outre les $-\omega(C_{iq})$ pour $1 \leq q \leq j$ sont disjoints.



$\omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ est un cocycle avec $a = \{ \alpha, \beta, \lambda, \mu \}$

Le sous-graphe engendré par A possède deux composantes connexes A1 et A2 (respectivement incluses dans C1 et C2, les deux composantes connexes du graphe).

Le sous-graphe engendré par C1-A1 a deux composantes connexes C11 et C12.

Le sous-graphe engendré par C2-A2 a deux composantes connexes C21 et C22.

On obtient pour les vecteurs associés aux cocycles :

$$\omega(A) = \omega(A1) + \omega(A2) = -\omega(c11) - \omega(c12) - \omega(c21) - \omega(c22)$$

▲ SCH. 14 : ILLUSTRATION DE LA DÉCOMPOSITION EN COCYCLES ÉLÉMENTAIRES

2. Lemme des arcs colorés (Minty 1960)

Lemme

"Soit un graphe dont les arcs sont numérotés de 1 à m et sont colorés soit en rouge, soit en vert, soit en noir. L'arc 1 est supposé être coloré en noir. Alors une (et une seule) des propositions suivantes est vérifiée :

1. il passe par l'arc 1 un cycle élémentaire uniquement rouge et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens ;
2. il passe par l'arc 1 un cocycle élémentaire uniquement vert et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens."

Démonstration:

On pose $1 = (b, a)$ et on marque les sommets itérativement de proche en proche. On marque d'abord le sommet a . Itérativement, si x est un sommet marqué alors on marque y (non marqué) dans un des deux cas suivants :

- ♦ il existe un arc noir de la forme (x, y)
- ♦ il existe un arc rouge de la forme (x, y) ou (y, x) .

On arrête lorsqu'aucun des sommets non marqués ne peut être marqué.

On se trouve alors face à deux cas possibles:

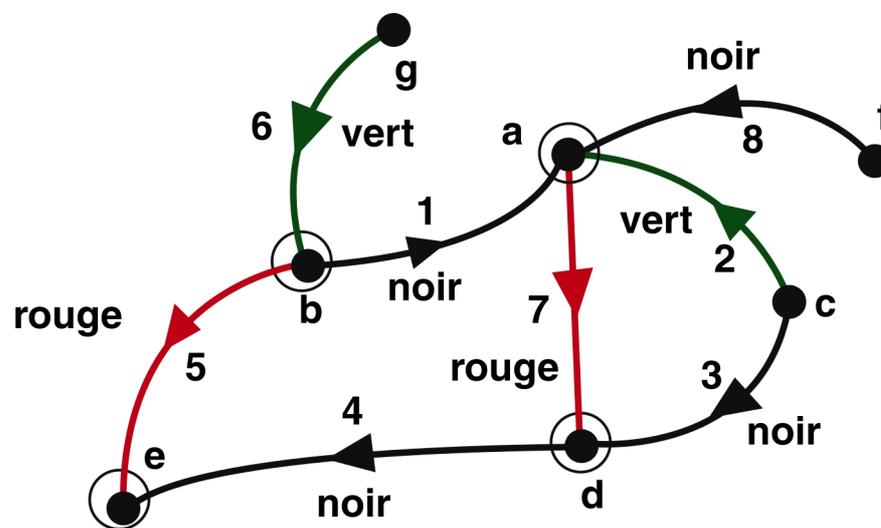
- ♦ si on a marqué le sommet b , alors les sommets utilisés de proche en proche pour marquer b constituent un cycle (forcément) élémentaire rouge et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens (de parcours). Il ne peut pas exister un cocycle noir et vert, contenant l'arc 1, avec tous les arcs noirs

orientés dans le même sens [1]. Le cycle parcouru est la somme de cycles élémentaires disjoints dont l'un d'eux contient l'arc 1.

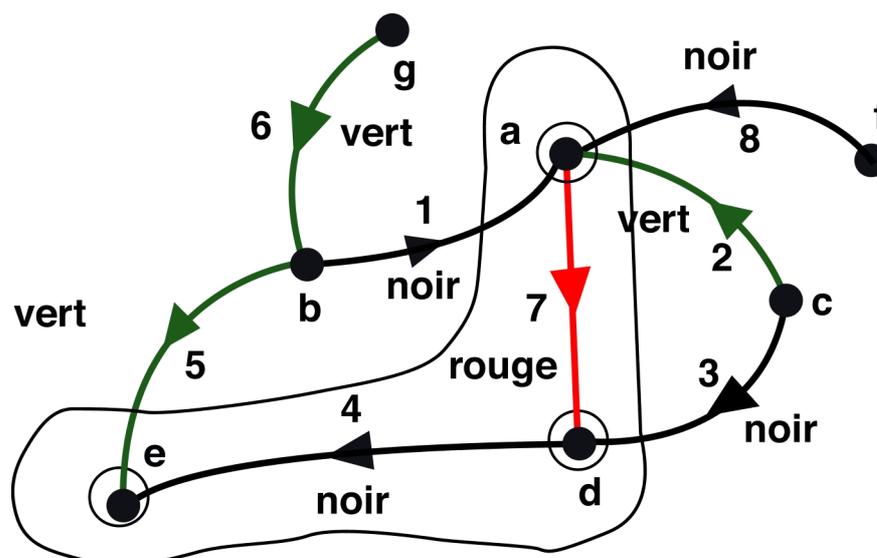
[1 Si l'arc 1 est incident à un ensemble A alors il existe forcément soit un arc noir incident A dans l'autre sens soit un arc rouge incident à A]

- ◆ si on n'a pas marqué le sommet b , alors les sommets utilisés de proche en proche pour marquer b constituent un ensemble A , tel que le cocycle $\omega(A)$ ne contienne que des arcs noirs orientés vers A et des arcs verts. Il ne peut pas exister un cycle noir et rouge, contenant l'arc 1, avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens. Le cocycle ainsi défini est la somme de cocycles élémentaires disjoints dont l'un d'eux contient l'arc 1.

[2 "Orientés vers A " est une équivalent à "incident à A vers l'intérieur"]



▲ SCH. 15 : EXEMPLE DE CYCLE NOIR ET ROUGE AVEC TOUTS LES ARCS NOIRS ORIENTÉS DANS LE MEME SENS



▲ SCH. 16 : EXEMPLE DE COCYCLE NOIR ET VERT AVEC TOUTS LES ARCS NOIRS ORIENTÉS DANS LE MEME SENS

Corollaire :

tout arc appartient à un circuit élémentaire ou à un cocircuit élémentaire (ou exclusif)

Il suffit de ne s'intéresser qu'aux arcs noirs pour s'en persuader.

3. Base de cycles et base de cocycles

Définitions :

Les cycles $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ sont des *cycles indépendants* si une combinaison linéaire des vecteurs associés ne peut être nulle que si chaque coefficient est nul. Une *base fondamentale de cycles* est un ensemble de cycles indépendants tel que tout cycle puisse s'écrire comme une combinaison linéaire. Le *nombre cyclomatique* du graphe est égale à la dimension de la base de cycles.

De même, les cocycles $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j$ sont des *cocycles indépendants* si une combinaison linéaire des vecteurs associés ne peut être nulle que si chaque coefficient est nul. Une *base fondamentale de cocycles* est un ensemble de cocycles indépendants tel que tout autre cocycle puisse s'écrire comme une combinaison linéaire. Le *nombre cocyclomatique* du graphe est égale à la dimension de la base de cocycles.

Notations :

Le nombre cyclomatique d'un graphe G est noté : $\nu(G)$ et le nombre cocyclomatique est noté : $\lambda(G)$

Théorème :

"Soit G un graphe avec n sommet, m arcs et p composantes connexes, alors $\nu(G) = m - n + p$ et $\lambda(G) = n - p$ "

Démonstration :

Soit une C_i composante connexe du graphe. Soit a_1 un sommet quelconque du graphe, on pose $A_1 = \{a_1\}$. Soit $[a_1, a_2]$ une arête d'un cocycle élémentaire contenu dans $\omega(A_1)$, on pose $A_2 = A_1 \cup \{a_2\}$. On peut définir itérativement $|C_i| - 1$ cocycles élémentaires indépendants car chacun contient un arc non contenu dans le précédent. On obtient donc $n - p = \sum_{1 \leq i \leq p} (|C_i| - 1)$ cocycles élémentaires pour le graphe.

On pose $\nu(G_i) = m_i - n + p_i$, où (G_i) est une suite de graphes partiels de G tel que G_0 soit le graphe partiel de G engendré en ne gardant aucun arc et G_i soit obtenu en rajoutant à G_{i-1} un arc i de G . On a donc :

- ♦ $\nu(G_0) = m_0 - n + p_0 = 0 - n + n = 0$ car G_0 n'a que des point isolés donc autant de composantes connexes ;
- ♦ si l'arc i ne ferme pas un nouveau cycle alors $\nu(G_i) = \nu(G_{i-1})$ car dans ce cas $m_i = m_{i-1} + 1$ et $p_i = p_{i-1} - 1$ (il y a "un sommet isolé de moins") sinon $\nu(G_i) = \nu(G_{i-1}) + 1$ car $m_i = m_{i-1} + 1$ mais le nombre de sommets isolés est inchangé donc $p_i = p_{i-1}$.

Finalement, on a ainsi défini $m - n + p$ cycles dans G . Ces cycles sont indépendants (par construction) car contenant chacun un arc non contenu dans les autres.

Si on considère dans R^m , l'espace M engendré par les cycles et l'espace Ω des cocycles, alors M et Ω sont orthogonaux car le produit scalaire d'un cycle μ et d'un cocycle ω est nul car :

$$\langle \mu, \omega \rangle = \sum_{1 \leq i \leq p} \mu_i \omega_i = \left\langle \mu, \sum_{a \in A} \omega(a) \right\rangle = \sum_{a \in A} \langle \mu, \omega(a) \rangle = \sum_{a \in A} 0 = 0 \quad (\text{d'après le corollaire}).$$

Par conséquent, $\dim M + \dim \Omega \leq m$ or on a vu que $\dim M \geq m - n + p$ et que $\dim \Omega \geq n - p$ donc $\nu(G) = \dim M = m - n + p$ et $\lambda(G) = \dim \Omega = n - p$

Partie B. Planarité

1. Graphe Planaire



Un graphe G est *planaire* s'il est possible de le représenter sur un plan de sorte que les sommets soient des points distincts et les arcs [1] des courbes simples ne se rencontrant pas en dehors de leurs extrémités.

[1 On appliquera évidemment ces exigences aux arêtes si le graphe n'est pas orienté]

Un *graphe planaire topologique* est une représentation d'un graphe planaire G sur un plan, conformément aux exigences précédentes.

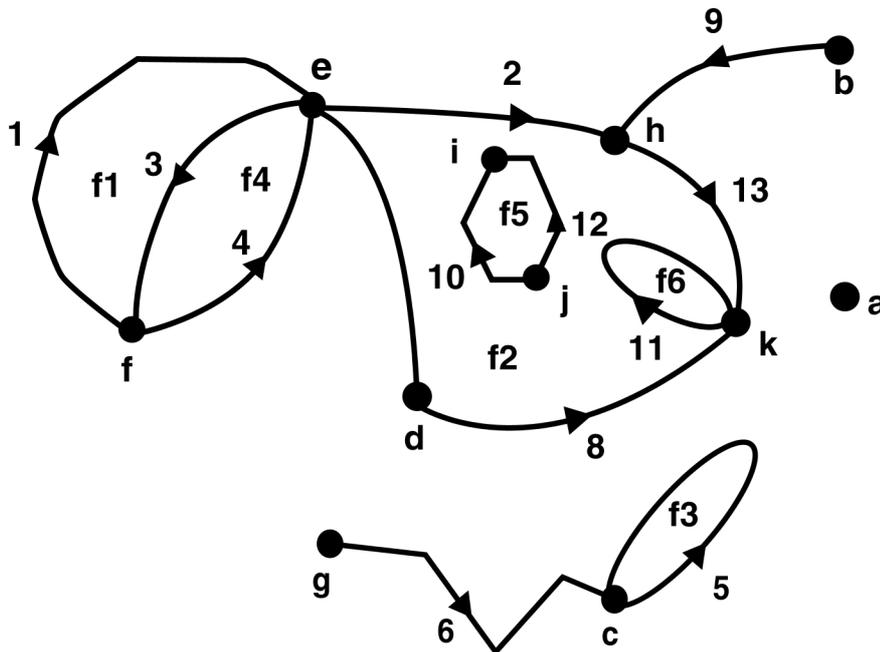
Dans un graphe planaire topologique, une *face* est par définition une partie du plan limitée par des arcs de sorte que deux points de la face puissent toujours être reliés par un trait continu ne rencontrant ni sommet ni arc. Deux faces sont *adjacentes* si elles ont un arc en commun. Deux faces sont *opposées* si elles ont un sommet commun sans être adjacentes.

L'ensemble des arcs qui *touchent* une face s'appelle la *frontière* de la face. Dans un graphe planaire topologique, la frontière d'une face est constituée par les arcs d'un ou plusieurs cycles élémentaires disjoints (au sens des arêtes), des arcs pendants ou des isthmes reliant deux cycles disjoints. On appelle *contour* d'une face, celui de ces cycles élémentaires [2] qui contient à son intérieur tous les autres arcs de la frontière. On notera qu'il y a toujours *une* face illimitée appelée *face infinie* ou *face externe* et qui n'admet donc pas de contour. *Les autres faces sont finies et admettent toutes un contour.*

[2 Cette définition du contour, comme étant un cycle élémentaire, impose de considérer les cycles élémentaires comme disjoints au sens des arcs uniquement et une éventuelle boucle comme étant à l'intérieur du contour (Cf. figure 16).]

Convention :

On appelle encore G le graphe planaire topologique issu d'un graphe planaire et on omettra l'adjectif "topologique".



La face f_2 a pour frontière $\{ 2, 7, 8, 10, 11, 12, 13 \}$
et pour contour $(2, 13, 8, 7)$

▲ SCH. 17 : UN EXEMPLE DE GRAPHE PLANAIRE (TOPOLOGIQUE)

2. Formule d'Euler

Théorème :

dans un graphe planaire topologique G , les contours des différentes faces finies constituent une base fondamentale de cycles indépendants

Démonstration :

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de faces (Berge, 1983)

Formule d'Euler :

si, dans un graphe planaire topologique connexe, il y a n sommets, m arêtes et f faces, alors : $n - m + f = 2$

Démonstration :

Cette formule se démontre aisément par récurrence sur le nombre de faces.

En outre, le nombre de faces finies est égal au nombre cyclomatique $\nu(G)$ d'où $f = \nu(G) + 1 = (m - n + 1) + 1 = m - n + 2$. L'utilisation du théorème précédent et du nombre cyclomatique permet de déduire une formule valable pour les graphes planaires non connexes.

Corollaire :

dans un graphe planaire simple G , il existe un sommet de degré $d_G(x) \leq 5$

G étant un graphe simple, toute face est entourée par au moins 3 arêtes distinctes. On peut considérer séparément chaque composante connexe pour pouvoir appliquer la formule d'Euler et étudier le nombre d'arcs dans le graphe biparti d'incidence faces arêtes $FA(F, A, V_{FA})$ formé par un ensemble A de points représentant les faces, par un ensemble B de points représentant les arêtes et des arcs allant de A à B tels que $u = (x, y) \in V_{FA}$

si l'arête représentée par y est dans la frontière de la face représentée par x

[On dit que la face a est "incidente" à l'arête b]

Soient V_{FA} le nombre d'arcs dans ce graphe biparti, m le nombre d'arêtes, n le nombre de sommets et le nombre de faces dans la composante connexe de G , on a alors :

- ◆ $|V_{FA}| \leq 2m$ car chaque arête de G touche au plus deux faces de G ;
- ◆ $|V_{FA}| \geq 3f$ car une face de G est entourée par au moins 3 arêtes distinctes.

$$\text{d'où } f \leq \frac{2m}{3}$$

Si tout sommet est l'extrémité d'au moins 6 arêtes, on obtient de la même façon mais en considérant le graphe biparti d'incidence sommets arêtes $SA(S, A, V_{SA})$:

- ◆ $|V_{SA}| = 2m$ car chaque arête de G a deux extrémités distinctes (G est simple) ;
- ◆ $|V_{SA}| \geq 6n$ car, par hypothèse, tout sommet est l'extrémité d'au moins 6 arêtes.

$$\text{d'où } n \leq \frac{2m}{6}$$

Alors la formule d'Euler conduit à : $2 = n - m + f \leq \frac{2m}{6} - m + \frac{2m}{3} = 0$, ce qui est absurde. Donc, il existe forcément un sommet de degré $d_G(x) \leq 5$.

3. Théorème de Kuratowski (1930)



Une subdivision d'un graphe est un graphe obtenu en ajoutant des sommets sur les arcs (ou les arêtes).

Théorème :

un multigraphe G est planaire si et seulement s'il ne contient aucune subdivision du graphe complet à 5 sommets K_5 , et du graphe biparti complet $K_{3,3}$

Démonstration :

La démonstration de la contra posée se fait par récurrence sur le cardinal minimum des ensembles d'articulation ((Sache, 1974) ou (Milledrogues & al., 1994)).

Propriété :

les multigraphes complets $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires.

Démonstration :

Supposons que le multigraphe $K_{3,3}$ des (3 maisons et des 3 usines) est planaire. Alors la formule d'Euler doit être vérifiée donc : $f = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5$. Chacune des faces a au moins 4 arêtes à son contour car dans le cas contraire deux sommets du même ensemble seraient reliés. Le nombre d'arcs dans le graphe biparti d'incidence faces arêtes conduit donc à : $18 = 2 m \geq 4 f = 20$. L'absurdité de ce résultat prouve que $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Supposons que le multigraphe complet à 5 sommets K_5 est planaire. Alors la formule d'Euler doit être vérifiée donc : $f = 2 - n + m = 2 - 5 + 10 = 7$. Chacune des faces a au moins 3 arêtes à son contour. Le nombre d'arcs dans le graphe biparti d'incidence faces arêtes conduit donc à : $20 = 2 m \geq 3 f = 21$. L'absurdité de ce résultat prouve que K_5 n'est pas planaire.

4. Graphe Dual



Soit un graphe *planaire* G , *connexe et sans sommet isolé* ; on lui fait correspondre un graphe planaire G^* de la façon suivante :

- ◆ à l'intérieur de chaque face f de G , on place un sommet s^* de G^* ;
- ◆ à tout arc a de G , on fait correspondre un arc a^* de G^* qui relie les sommets x^* et y^* de G^* correspondant aux faces de part et d'autre de l'arc a (x^* correspond à la face à gauche de l'arc et y^* à la face à droite de l'arc en suivant son orientation).

Le graphe obtenu s'appelle le *graphe dual* de G . Ce graphe est *planaire, connexe et sans sommet isolé*.

Le graphe dual de G^* est $G : (G^*)^* = G$ (si G n'est pas orienté).

A toute boucle de G correspond un arc pendant de G^* et réciproquement.

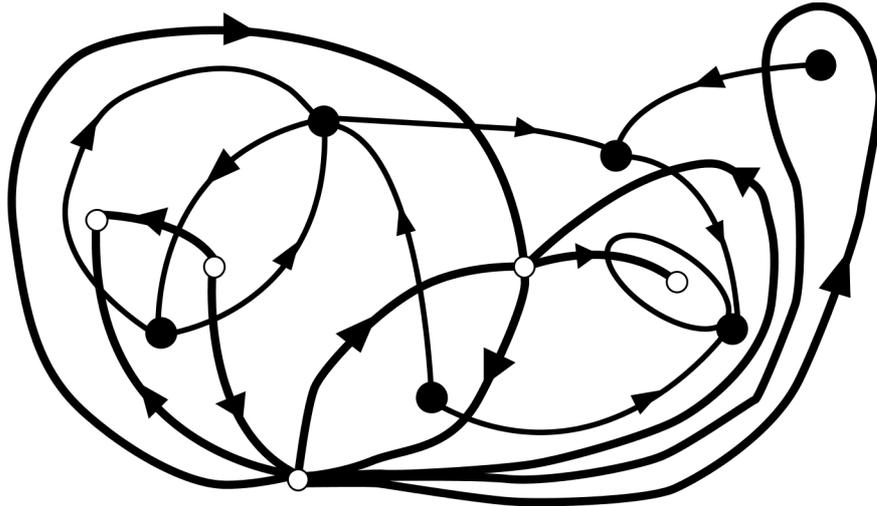
S'il existe une paire de sommets x et y de G tels que $x \neq y$ et $m_G^+(x, y) + m_G^-(x, y) \geq 2$ alors G^* admet un sommet de degré 2.

Théorème

à tout cycle élémentaire de G correspond un cocycle élémentaire de G^* , et vice versa ; à tout circuit élémentaire de G correspond un cocircuit élémentaire de G^* , et vice versa.

Démonstration :

(Berge, 1983)



▲ SCH. 18 : UN EXEMPLE DE GRAPHES DUAUX

Partie C. Arbre, forêt et arborescence

1. Définitions

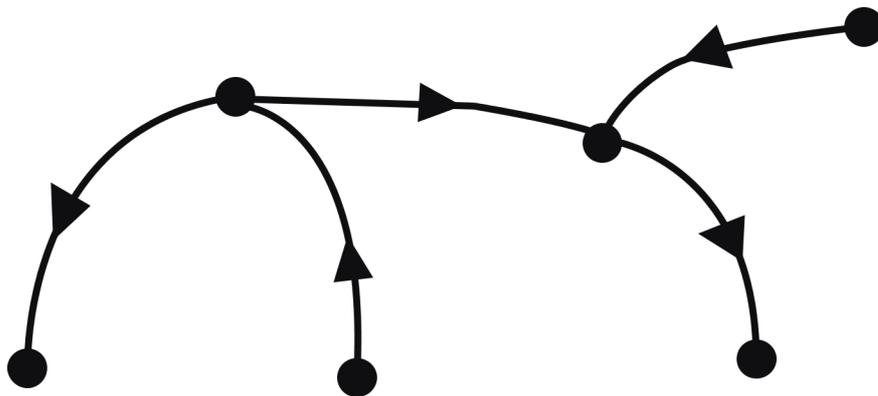


Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Un arbre est donc nécessairement un 1-graphe. Une *forêt* est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.

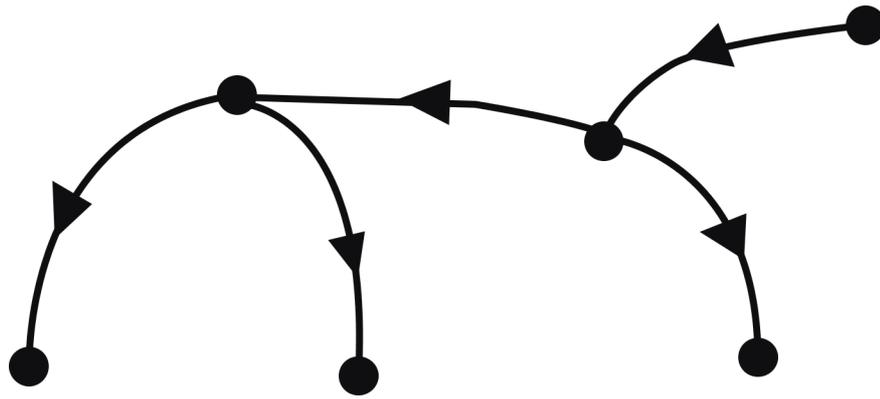
Dans un graphe, le sommet x est une *racine* si pour tout autre sommet y , il existe un chemin $\mu(x, y)$. Une *arborescence* est un arbre muni d'une racine.

Notation

Un arbre est souvent noté $H(X, U)$ en hommage à Hamilton.



▲ SCH. 19 : UN EXEMPLE D'ARBRE



▲ SCH. 20 : UN EXEMPLE D'ARBORESCENCE

Théorème :

Soit $H(X, U)$ un graphe d'ordre $|X| = n \geq 2$; les six propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre :

1. H est connexe et sans cycle ;
2. H est sans cycle et admet $n - 1$ arcs ;
3. H est connexe et admet $n - 1$ arcs ;
4. H est sans cycle et en ajoutant un arc, on crée un cycle (et un seul) ;
5. H est connexe, et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe ;
6. Tout couple de sommets est reliés par une chaîne et une seule.

Démonstration :

(1) \Rightarrow (2) : si p est le nombre de composantes connexes, n le nombre de sommets et m le nombre d'arcs alors $p = 1$ et $\nu(H) = m - n + p = 0$ donc $m = n - p = n - 1$.

(2) \Rightarrow (3) : $\nu(H) = 0$ et $m = n - 1 \Rightarrow p = \nu(H) - n + 1 = 1$ donc H est connexe.

(3) \Rightarrow (4) : $p = 1$ et $m = n - 1 \Rightarrow \nu(H) = m - n + p = 0$ et en ajoutant un arc $\nu(H) = 1$

(4) \Rightarrow (5) : si H n'est pas connexe, on prend x et y non connectés, alors l'ajout de l'arc (x, y) ne suffit pas pour créer un cycle donc H est connexe, $p = 1, \nu(H) = 0$ et $m = n - 1$. En supprimant un arc, on obtient un graphe H' tel que $m' = n' - 2$ et $\nu(H') = 0 \Rightarrow p' = \nu(H') - m' + n' = 2$ et H' n'est plus connexe.

(5) \Rightarrow (6) : H est connexe donc pour toute paire de sommets x et y , il existe une chaîne $\mu[x, y]$ et une seule car dans le cas contraire la suppression d'un arc ne suffirait pas pour déconnecter le graphe.

(6) \Rightarrow (1) : il existe une chaîne entre tout couple de sommets donc H est connexe et il

n'y a pas de cycle sinon on pourrait créer deux chaînes.

2. Propriétés

Théorème :

un arbre d'ordre $n \geq 2$ admet au moins deux sommets pendants

Démonstration :

Si un arbre H n'admet pas de sommet pendant ou bien admet un seul sommet pendant, alors on parcourt le graphe H en s'astreignant à ne jamais utiliser deux fois le même arc et en partant, soit d'un sommet quelconque, s'il n'y a pas de sommet pendant, soit du sommet (seul) sommet pendant s'il n'y en a qu'un.

La chaîne ainsi créée est infinie car l'absence de sommet pendant permet toujours de trouver un nouvel arc pour repartir du sommet courant. Ceci est bien sûr absurde car H est fini (d'ordre n) et sans cycle.

Théorème :

un graphe G admet un arbre comme graphe partiel si et seulement si G est connexe.

Démonstration :

Si G n'est pas connexe, il n'a pas de graphe partiel connexe. Si G est connexe, on cherche un arc dont la suppression ne rompt pas la connexité :

- ◆ si on n'a pas trouvé d'arc à supprimer alors G est un arbre d'après la propriété 5 du paragraphe Définition ;
- ◆ si on a trouvé un tel arc, on le supprime et on recommence. Lorsqu'on ne pourra plus supprimer d'arc sans rompre la connexité, on aura défini un arbre comme graphe partiel d'après la propriété 5 du paragraphe Définition.

3. Arbre maximal (ou couvrant)



Soit $G(X, U)$, $H(X, T)$ est un *arbre maximal* ou *arbre couvrant* de G si H est à la fois arbre et un graphe partiel de G .

Condition d'existence et construction :

Le deuxième théorème du paragraphe Propriétés donne la condition d'existence d'un arbre maximal et sa démonstration présente un "algorithme" de construction.

Corollaire :

si G est connexe alors il existe deux sommets x et y de X tels que $G - \{x, y\}$ soit connexe

Flots

Partie A. Définitions



Soit un graphe $G(X, U)$ dont les arcs sont numérotés de 1 à m . Un *flot* dans G est un vecteur à m composantes réelles : $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T$. Soit la matrice A la transposée de A est notée A^T (idem pour les vecteurs). [] [] tel qu'en tout sommet $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T$ du graphe la loi de Kirchhoff soit vérifiée :

$$\sum_{u \in \omega^+(s)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(s)} \varphi_u$$

La composante φ_u est appelée la *quantité de flux* (ou le *flux* du vecteur u et peut-être assimilée par exemple à la quantité d'électricité (ou de "véhicules") parcourant l'arc u (dans le sens de l'arc si $\varphi_u > 0$, dans le sens contraire si $\varphi_u < 0$). La *capacité* de l'arc u ($c_u \geq 0$) est la borne supérieure du *flux admissible* sur l'arc u . Si on munit chaque arc d'un intervalle $[b_u, c_u]$, un flot $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T$ tel que $\forall u \in U, b_u \leq \varphi_u \leq c_u$ est un *flot compatible*.

On appelle *réseau de transport* un graphe $G(X, U)$ dont les arcs sont numérotés de 1 à m et où chaque arc u est muni d'un intervalle $[b_u, c_u]$ tel que :

- ◆ $b_u = 0$
- ◆ $c_u > 0$ pour $u \in U$ avec $c_1 = +\infty$
- ◆ l'arc $1 = (b, a)$ (avec $b \neq a$) est appelé arc de retour entre la *sortie* b et l'*entrée* a telles que : $\vec{\omega}^-(a) = (1, 0, \dots, 0)$ et $\vec{\omega}^+(b) = (1, 0, \dots, 0)$ [L'arc 1 est le seul arc incident à a vers l'intérieur et le seul arc incident à b vers l'extérieur.].

φ_1 est appelée la *valeur du flot* (dans le réseau de transport).

En règle générale, un réseau de transport est un graphe antisymétrique.

On appelle *coupe* séparant deux sommets a et b de X , un ensemble d'arcs de la forme : $\omega^+(A)$ avec $A \subset X$, $a \in A$ et $b \notin A$. La capacité de la coupe est :

$$C(A) = \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u$$

Notations :

Par la suite, on oubliera la notation vectorielle d'un flot $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T$ et on écrira simplement $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$.

Si M est la matrice d'incidence sommets arcs du graphe G (sans boucles) alors un flot $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ dans G est tel que : $M \cdot (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T = 0$ du fait de la conservation aux nœuds.

Si G est un réseau de transport alors on le note parfois $R(X, U, (c_u)_{u \in U})$

Partie B. Recherche d'un flot maximum dans un réseau de transport

1. Définition



Flot maximum

Un *flot maximum* (dans un réseau de transport [1]) est un flot compatible de valeur maximale.

[1 En rajoutant si besoin un arc et en les renumérotant, on arrive toujours à définir un réseau de transport à partir d'un sous graphe partiel.]

2. Théorème de Ford-Fulkerson

Lemme

soient $G(X, U)$ muni des intervalles $[b_u, c_u]$, $A \subset X$, $a \in A$ et $b \notin A$. Pour tout

flot compatible, on a $\varphi_1 \leq \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u - \sum_{u \in \omega^-(A) - \{1\}} b_u$

Démonstration

Soient $G(X, U)$, l'arc $1 = (b, a)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, avec $A \subset X$, $a \in A$ et $b \notin A$. La loi de conservation du flux impose :

$$\sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(A) - \{1\}} \varphi_u + \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1 = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u - \sum_{u \in \omega^-(A) - \{1\}} \varphi_u$$

d'où $\varphi_1 \leq \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u - \sum_{u \in \omega^-(A) - \{1\}} b_u$ et dans un réseau de transport

$$\varphi_1 \leq \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u = C(A)$$

car $\forall u \in U, 0 = b_u \leq \phi_u \leq c_u$.

Corollaire

si un flot et une coupe sont tels que la valeur du flot est égale à la capacité de la coupe, alors le flot est un flot maximum et la coupe est de capacité minimale.

Évident car $\max(\varphi_1) \leq \min_{A \text{ coupe de } G} (C(A))$

Corollaire

une condition nécessaire et suffisante pour que le problème du flot maximum de a à b ait une solution de valeur finie est qu'il n'existe pas de chemin de capacité infinie entre a et b

La condition est évidemment nécessaire ; elle est suffisante car s'il n'existe pas de chemin de capacité infinie entre a et b , le graphe partiel engendré par les arcs de capacité infinie ne peut pas être connexe et seuls les arcs de la coupe séparant a et b , contenant l'ensemble des sommets reliés à a par un chemin, sont de capacité finie.

Théorème :

dans un réseau de transport, la valeur maximale d'un flot compatible de l'entrée a à la sortie b de X est égale à la capacité d'une coupe de capacité minimale séparant a et b .

Démonstration :

Soient $R(X, U, (c_u)_{u \in U})$ l'arc $1 = (b, a)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ compatible maximum, avec $A \subset X$, $a \in A$ et $b \notin A$. On colorie l'arc 1 en noir et les autres arcs comme suit :

- ◆ $u \in U$ est coloré en noir si $\varphi_u = 0$;
- ◆ $u \in U$ est coloré en rouge si $0 < \varphi_u < c_u$;
- ◆ $u \in U$ est coloré en vert si $\varphi_u = c_u$.

Supposons que l'on soit dans le premier cas du "Lemme des arcs colorés de Minty", il existe alors un cycle noir et rouge passant par 1 avec tous les arcs noirs dans le même sens. Soit $\vec{\mu}$ le vecteur associé au cycle passant par 1 dans le sens de 1 alors le cycle de vecteur associé $\vec{\mu} + \varepsilon \cdot \vec{\mu}$ (avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit) serait compatible et de valeur supérieure ce qui est impossible car le flot est maximum.

On est donc dans le deuxième cas du "Lemme des arcs colorés de Minty" : il existe un cocycle $\omega(A)$ noir et vert avec $a \in A$ et $b \notin A$ tel que tous les arcs de $\omega^+(A)$ soient verts et tous les arcs de $\omega^-(A)$ soient noirs (en particulier $1 \in \omega^-(A)$). On a alors :

$$\varphi_1 = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u - \sum_{u \in \omega^-(A) - \{1\}} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u$$

Ce qui prouve que la valeur du flot φ est égale à la capacité de la coupe $\omega^+(A)$.
D'après le premier corollaire du lemme précédent, le flot est maximum et la coupe est minimale.

3. Algorithme de Ford-Fulkerson

Principe de l'algorithme :

On part d'un flot compatible (dans un graphe G à capacités entières) [1]. On augmente de proche en proche la valeur de φ_1 du flot à maximiser par plusieurs appels à une procédure de marquage analogue à celle de la démonstration précédente.

[1 Dans un réseau de transport, il y a toujours un flot compatible : le flot nul.]

Initialisation du marquage :

On marque le sommet a avec l'indice +1.

Itérations du marquage :

Si x est marqué et y n'est pas marqué alors :

- ◆ on marque y si $(\varphi_k = \varphi(k=(x, y)) < c_k)$;
- ◆ on marque y si $(b_k < \varphi_k = \varphi(k=(y, x)))$

Arrêt du marquage :

Si on a marqué b alors on détermine un flot compatible $\varphi_1^+ > \varphi_1$. Soit un chaîne allant de a à b de la forme $\mu [a, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, b]$. On définit le flot φ^+ par :

- ◆ $\varphi_1^+ = \varphi^+(1=(b, a)) = \varphi(1=(b, a)) + 1 = \varphi_1 + 1$
- ◆ si $\varphi_i = \varphi(i=(a_i, a_{i+1})) < c_i$ alors $\varphi_i^+ = \varphi^+(i=(a_i, a_{i+1})) = \varphi_i + 1$;
- ◆ si $\varphi_i = \varphi(i=(a_{i+1}, a_i)) > b_i$ alors $\varphi_i^+ = \varphi^+(i=(a_{i+1}, a_i)) = \varphi_i - 1$;
- ◆ dans les autres cas, on pose $\varphi^+(x, y) = \varphi(x, y)$.

φ^+ est compatible car on n'a modifié le flot que sur un cycle passant par l'arc 1 (dans le sens de l'arc 1) et la loi de Kirchhoff est toujours vérifiée. On peut recommencer la phase de détermination d'un flot $\varphi_1^+ > \varphi_1$ en prenant φ^+ au lieu de φ .

Si on n'a pas marqué b alors le flot φ^+ est maximum en vertu des résultats précédents.

Partie C. Recherche d'un flot compatible

Si le graphe G n'est pas un réseau de transport, l'existence d'un flot compatible n'est pas assurée.

Lemme :

une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un flot compatible est que l'on ait pour tout cocycle $\omega(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$:

$$\sum_{u \in \omega^+(\mathbf{A})} c_u - \sum_{u \in \omega^-(\mathbf{A})} b_u \geq 0$$

Cette condition est nécessaire car si un flot compatible existe alors

$$0 = \sum_{u \in \omega^+(\mathbf{A})} \varphi_u - \sum_{u \in \omega^-(\mathbf{A})} \varphi_u \leq \sum_{u \in \omega^+(\mathbf{A})} c_u - \sum_{u \in \omega^-(\mathbf{A})} b_u.$$

Montrons qu'elle est suffisante grâce à l'algorithme de JC.Herz 1967 :

Principe de l'algorithme :

Comme pour l'algorithme de Ford Fulkerson, on va construire un flot à partir d'un autre flot. On part d'un flot quelconque (peut-être non compatible). On appelle *distance du flux* φ_u à l'intervalle $[b_u, c_u]$ la valeur :

$$\bar{d}_u(\varphi_u) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_u \leq \varphi_u \leq c_u \\ b_u - \varphi_u & \text{si } \varphi_u < b_u \\ \varphi_u - c_u & \text{si } \varphi_u > c_u \end{cases}$$

et on va essayer de diminuer de proche en proche le nombre $\bar{d}(\varphi) = \sum_{u \in U} \bar{d}_u(\varphi_u)$

(appelé *distance du flot aux intervalles*)

Initialisation du marquage :

Si $\bar{d}(\varphi) = 0$, le flot est compatible donc c'est fini. Si $\bar{d}(\varphi) > 0$, on numérote les arcs de manière à avoir $\bar{d}_1(\varphi_1) > 0$ et $\varphi_1 < b_1$. On marque le sommet a extrémité finale de l'arc $1 = (b, a)$.

Itérations du marquage : (analogue à celle utilisée précédemment)

Si x est marqué et y n'est pas marqué alors :

- ◆ on marque y si $(\varphi_k = \varphi(k=(x, y)) < c_k)$;
- ◆ on marque y si $(b_k < \varphi_k = \varphi(k=(y, x)))$

Arrêt du marquage :

Si on a marqué b alors on détermine un flot compatible qui vérifie $\bar{d}(\varphi^+) < \bar{d}(\varphi)$ comme pour l'algorithme de Ford Fulkerson.

Sinon la condition nécessaire précédente nous indique qu'il n'existe pas de flot compatible car l'ensemble $A \subset X$ des sommets marqués vérifie $a \in A$ et $b \notin A$ et par construction :

$$0 = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u - \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi_u > \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u - \sum_{u \in \omega^-(A)} b_u$$

Partie D. Application à la h-connexité

Théorème de Menger Dirac :

une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe G soit h connexe est que l'on puisse relier deux sommets a et b par h chemins intérieurement disjoints.

La condition est évidemment suffisante.

Cette condition est nécessaire car si a et b sont deux sommets non adjacents, on peut construire un réseau de transport ayant pour entrée a et sortie b pour lequel un flot de valeur maximum φ_1 détermine φ_1 chemins disjoints de G entre a et b . On symétrise G puis on dédouble chaque sommet $x \neq a$ et $x \neq b$ en x' et x'' reliés par un arc (x', x'') de capacité 1. Tout arc incident à x vers l'intérieur est remplacé par un arc "entrant" de x' avec une capacité $+\infty$, de même tout arc incident à x vers l'extérieur est remplacé par un arc "sortant" de x'' avec une capacité $+\infty$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Ford Fulkerson.

Partie E. Application aux couplages



Étant donné un graphe simple, on appelle *couplage* un ensemble de E d'arêtes tel que deux arêtes quelconques sont non adjacentes. On dit qu'un sommet est *saturé* par un couplage E si un arc de E est incident au sommet. Un *couplage parfait* est un couplage qui sature tous les sommets du graphe.

Dans un réseau de transport biparti $R(X, Y, U)$, on appelle *demande en y* la valeur :

$$d(y) = \begin{cases} c(y, b) & \text{si } y \in Y, \text{ demande de l'ensemble } B \subset Y, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$d(B) = \sum_{\forall y \in Y} d(y)$ et on note $F(B)$ la quantité maximum de flot que l'on peut

faire entrer dans B , c'est-à-dire la valeur maximum du flot pour un réseau de transport R' obtenu à partir de R en modifiant les capacités comme suit :

$$\begin{cases} c'(y, b) = +\infty & \text{si } y \in B \\ c'(y, b) = 0 & \text{si } y \in Y - B \\ c'(x, y) = c(x, y) & \text{pour tout autre arc } (x, y) \end{cases}$$

Théorème :

dans un réseau de transport biparti $R(X, Y, U)$, la valeur maximum dans l'arc 1 d'un flot compatible est : $\varphi_1 = d(Y) + \min_{B \subset Y} (F(B) - d(B))$

Démonstration :

On considère un ensemble $B \subset Y$ et on construit un réseau R' comme indiqué ci dessus. Le théorème de Ford Fulkerson conduit à $F(B) = \min_{S \subset X, b \in S, a \notin S} (c'(\omega^-(S)))$.

On peut se restreindre aux ensembles S qui contiennent B , car sinon on aurait $c'(\omega^-(S)) = +\infty$; en outre, on peut remplacer dans cette relation S par $S - \{b\}$ sans rien changer au second membre. Enfin, on peut se restreindre aux ensembles de la forme $S = A \cup B$ avec $A \subset X$, si l'on s'intéresse seulement au minimum. On a donc

$$F(B) = \min_{A \subset X} (c'(\omega^-(A \cup B))) = \min_{A \subset X} (c(\omega^-(A \cup B)))$$

Si P et Q sont deux ensembles disjoints de sommets, on posera pour simplifier :

$$c(P, Q) = \sum_{p \in P, q \in Q} c(p, q)$$

Considérons un ensemble S qui contient la sortie b et non l'entrée a .

On pose : $S \cap X = A$ et $S \cap Y = b$

On a alors

$$c'(\omega^-(S)) = c(a, A) + c(X - A, B) + c(Y - B, b) = c(\omega^-(A \cup B)) + d(Y - B)$$

$$\text{et } c'(\omega^-(S)) = c(\omega^-(A \cup B)) + d(Y) - d(B)$$

Donc d'après le théorème de Ford Fulkerson :

$$\varphi_1 = \min_{b \in S, a \notin S} (c'(\omega^-(S))) = \min_{B \subset Y} \left(\min_{A \subset X} (c(\omega^-(A \cup B)) + d(Y) - d(B)) \right) = d(Y) + \min_{B \subset Y} (F(B) - d(B))$$

Théorème de König (1931) :

pour un multi graphe biparti $G(X, Y, U)$, le nombre maximum d'arêtes d'un couplage est égal à $\min_{A \subset X} (|X - A| + |\Gamma_G(A)|)$

Démonstration :

On construit le réseau de transport défini par les points de X , ceux de Y , une entrée a et une sortie b ; on joint a à tout $y_j \in Y$ par un arc de capacité $c(a, y_j) = 1$ et tout $x_i \in X$ à b par un arc de capacité $c(x_i, b) = 1$. On joint également y_j à x_i par un arc de capacité $c(y_j, x_i) = 1$ si $y_j \in \Gamma_G(x_i)$.

Si $A \subset X$, la demande totale de l'ensemble A est $d(A) = |A|$; la quantité maximum

de flot qu'on peut faire entrer dans A est $F(A) = |\Gamma_G(A)|$. Tout flot du réseau définit un couplage du graphe, les points x_i et y_j se correspondant lorsqu'une unité de flot passe dans l'arc (y_j, x_i) ; inversement tout couplage définit un flot.

La cardinalité maximum d'un couplage E est donc égale à la valeur maximum du flot entre a et b , c'est-à-dire, d'après le théorème précédent :

$$\max_E (|E|) = d(X) + \min_{A \subset X} (F(A) - d(A)) = |X| + \min_{A \subset X} (|\Gamma_G(A)| - |A|) = \min_{A \subset X} (|X - A| + |\Gamma_G(A)|)$$

Théorème de König Hall (1934) :

pour un multi graphe biparti $G(X, Y, U)$, on peut coupler X et Y si et seulement si on a $|\Gamma_G(A)| \geq |A| (A \subset X)$.

Démonstration :

On peut coupler X dans Y si et seulement si on a $|X| = \max_E (|E|) = \min_{A \subset X} (|X - A| + |\Gamma_G(A)|)$ d'après le théorème de König cela équivaut à $\min_{A \subset X} (|X - A| + |\Gamma_G(A)|) = 0$ d'où $|\Gamma_G(A)| \geq |A| (A \subset X)$.

Problèmes de cheminement

Partie A. Classification des problèmes mathématiques

Des algorithmes plus perfectionnés sont présentés dans "Graphes et algorithmes" de M.Gondran et M.Minoux. Les algorithmes sont présentés en pseudo code.

Les problèmes sont répartis en trois classes selon leurs difficultés. Un problème est :

- ◆ de classe P si l'algorithme pour le résoudre s'exécute en un "temps polynomial", c'est à dire si le nombre d'opérations est toujours plus petit qu'une puissance du nombre de données ;
- ◆ de classe NP si toute solution proposée peut être vérifiée en un "temps polynomial" (Cf. ci dessus) ;
- ◆ de classe NP complet si l'on savait résoudre un problème NP complet en un "temps polynomial" alors on saurait résoudre tous les problèmes NP en un "temps polynomial".

Actuellement, on connaît des problèmes NP que l'on ne sait pas résoudre en un "temps polynomial" donc la classe P est strictement incluse dans la classe NP. On connaît également plusieurs centaines de problèmes NP complets (par exemple : la recherche d'un chemin hamiltonien) qui revêtent donc un intérêt tout particulier.

Partie B. Recherche des composantes connexes

1. Présentation des objectifs

La vérification de la connexité d'un graphe est un des premiers problèmes de la théorie des graphes. En effet, on se ramène généralement à un graphe connexe en ne considérant qu'une composante connexe à la fois.

De nombreux algorithmes permettent de trouver l'ensemble des sommets appartenant à une même composante connexe. On se limitera, dans ce document, à montrer une version simple, non récursive : *l'algorithme de recherche de la composante connexe contenant un sommet particulier*" (Trémaux 1882 Tarjan 1972).

Principe de l'algorithme :

Cet algorithme a pour objectif de *rechercher la composante connexe contenant un sommet particulier*. Cette recherche est effectuée par création d'une arborescence dont la racine est le sommet choisi. La recherche s'effectue en profondeur d'abord.

Si le nombre de sommets "couverts" est égal à l'ordre du graphe, alors il n'y a qu'une seule composante connexe et le graphe est connexe. Dans le cas, contraire, on recommence avec un sommet (qui n'appartient pas à cette composante connexe). On en déduit donc le nombre de connexité du graphe.

Pour pouvoir atteindre tous les sommets d'une même composante connexe, on va considérer le graphe orienté associé au multigraphe associé au graphe de départ. Concrètement, on parcourt non pas le graphe d'origine mais un *graphe associé et symétrique*:

soit $G(X,U)$ on crée $G^*(X,U^*)$ tel que

$$u = (x,y) \in U \Rightarrow u \in U^* \text{ et } u^* = (y,x) \in U^*$$

2. Algorithme de Trémaux-Tarjan

Principe de l'algorithme :

Cet algorithme est un exemple de recherche en profondeur [1] On essaie à partir de chaque sommet du graphe G^* de construire le plus grand chemin possible (sans cycle) dans G^* . Lorsqu'on a "exploré" pour un sommet donné tous ses voisins dans G (ses successeurs dans H), on remonte au prédécesseur de ce sommet dans H . A partir de ce prédécesseur, on essaie alors de "redescendre" dans G^* .

[1 Depth First Search]

Structure des données :

On suppose que les sommets de G sont numérotés de 1 à $|X|$. Soit H l'arborescence couvrant la composante connexe de G^* recherchée. Le graphe étant fini, on peut définir les variables suivantes :

- ◆ i et j : sommets du graphe G donc de G^* et par conséquent de H
- ◆ $nbvois_i$: tableau de nombres ; $nbvois_i$ est le nombre de voisins de i dans G

$$(\text{nbvois}_i = |\Gamma_G(i)| = |\Gamma_{G^*}^+(i)|);$$

- ◆ nbexpl : tableau de nombres ; nbexpl_i est le nombre de voisins de i dans G (successeurs de i dans G^*) qui ont été atteints en partant de i .
- ◆ ordreH : l'ordre de H donc le cardinal de la composante connexe ;
- ◆ numH : tableau de rangs dans H ; numH_i est le rang du sommet i dans H ;
- ◆ predH : tableau de prédécesseurs ; predH_i est le numéro du prédécesseur de i dans H ;

On suppose que l'on dispose également de la fonction suivante qui doit avoir été écrite auparavant :

- ◆ vois : $\text{vois}(k, i)$ est le $k^{\text{ième}}$ voisin de i dans G (successeur de i dans G^*) en supposant qu'ils ont été triés par numéros.

Initialisation :

Soit S le sommet dont on recherche la composante connexe. Au départ, on pose que le prédécesseur de S dans H c'est S (convention pour l'algorithme). L'ordre de H est 1 car $S \in H$ et le premier sommet de H donc :

$\forall i \in G, \text{nbvois}_i \leftarrow |\Gamma_G(i)|$; $\text{nbexpl}_i \leftarrow 0$; $\text{numH}_i \leftarrow 0$; $\text{predH}_i \leftarrow 0$;
 $i \leftarrow S$; $\text{pred}_i \leftarrow S$; $\text{ordreH} \leftarrow 1$; $\text{numH}_i \leftarrow \text{ordreH}$;

Itérations :

tant que ($i \neq S$ ou $\text{nbexpl}_i < \text{nbvois}_i$)

si $\text{nbexpl}_i = \text{nbvois}_i$ *alors* on a "exploré" tous les voisins de i dans G donc on "remonte" dans H et le prédécesseur de i (dans H) devient le sommet courant.

$i \leftarrow \text{pred}_i$

sinon on "descend" si possible (dans H) vers le prochain voisin de i dans G (successeur de i dans G^*)

$\text{nbexpl}_i \leftarrow \text{nbexpl}_i + 1$; $j \leftarrow \text{vois}(\text{nbexpl}_i, i)$;

si $\text{pred}_j = 0$ *alors* j n'a pas encore de prédécesseur dans H donc on a trouvé un nouveau sommet de H

$\text{pred}_j \leftarrow i$; $\text{ordreH} \leftarrow \text{ordreH} + 1$; $\text{numH}_j \leftarrow \text{ordreH}$;

ce sommet devient le sommet courant ("parcours en profondeur d'abord")

$i \leftarrow j$;

fin "si"

fin "si"

fin "tant que"

Arrêt des itérations :

si $\text{ordreH} = |X|$ *alors* on a construit une arborescence maximale de G^* , c'est à dire un arbre couvrant de G et par conséquent G est connexe.

sinon H est de la forme $H(X_H, T)$ avec $X_H \subset X$ et $T \subset U^*$,

où $X_H = \{ i \in X / 1 \leq \text{numH}_i \leq \text{ordreH} \}$

et la composante connexe de G trouvée est $G_{X_H}(X_H, U_{X_H})$
 et on recommence avec un sommet de $X - X_H$
fin "si"

Partie C. Recherche du plus court chemin

1. Présentation des conditions

 Soit un graphe G , on associe à chaque arc u de G une *longueur* $l(u)$ telle que $\forall u \in U, l(u) \geq 0$. Soit a et b deux sommets de G , il s'agit de trouver un chemin $\mu(a, b)$ tel que $l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u)$ soit le plus petit possible. $\mu(a, b)$ est alors appelé le *plus court chemin* de a à b .

2. Algorithme de Moore-Dijkstra

Principe de l'algorithme :

Soit un graphe $G(X, U)$ connexe / $X = \{1, 2, \dots, N\}$ [1]. L'algorithme de Moore 1957 et Dijkstra 1959 permet d'obtenir le plus court chemin d'un sommet 1 à tous les autres. Cet algorithme fonctionne en au plus $|X| - 1$ itérations. On suppose au départ que la longueur du plus court chemin de 1 à $i \neq 1$ vaut $+\infty$. On construit une arborescence H de racine 1 qui couvre X .

[1] [Si G n'est pas connexe alors on remplace par la suite X par la composante connexe de G contenant 1]

Structure de données :

On dispose de la longueur $l(i, j) \geq 0, \forall (i, j) \in U$. On définit π_i^* comme la longueur minimum des chemins de 1 à i et $\pi_1^* = 0$. On partitionne X en deux sous ensembles S et $\bar{S} = X - S$ et on attribue à chaque sommet i du graphe une étiquette π_i définie par :

- ◆ si $i \in S, \pi_i = \pi_i^*$
- ◆ si $i \in \bar{S} = X - S, \pi_i = \min_{\forall k \in S / (k, i) \in U} (\pi_k^* + l(k, i))$

On utilise un tableau pred_H de prédécesseurs dans H : $\text{pred}_H i$ est le prédécesseur de i dans H .

Initialisation :

$\forall i \in \Gamma_G^+(1), \pi_i \leftarrow l(1, i); \text{pred}_H i \leftarrow 1;$
 $\forall i \in X - \Gamma_G^+(1), \pi_i \leftarrow \infty; \text{pred}_H i \leftarrow 0;$
 $\bar{S} \leftarrow \{2, \dots, N\}; \pi_1 \leftarrow 0; \text{pred}_H 1 \leftarrow 0;$

Itérations :

tant que ($|\bar{S}| \neq 0$)

on recherche un sommet de \bar{S} le plus proche des sommets de S

$\forall i \in \bar{S}$, si $\pi_j = \min_{\forall i \in \bar{S}} (\pi_i)$ alors $j \leftarrow i$ fin " si " ;

on retire j de la liste des sommets restant

$\bar{S} \leftarrow \bar{S} - \{ j \}$

si $|\bar{S}| \neq 0$ alors il reste des éléments dans \bar{S} , on met à jour l'étiquette de chaque sommet restant

$\forall i \in \bar{S} \cap \Gamma_G^+(j)$, si $\pi_i \geq \pi_j + l(j, i)$ alors

$\pi_i \leftarrow \pi_j + l(j, i)$; $\text{pred}H_i \leftarrow j$;

fin " si "

fin "si"

fin "tant que"

Arrêt des itérations :

$|\bar{S}| = 0 \Rightarrow \forall i \in X, \pi_i^* \neq +\infty$ donc on a trouvé la longueur du plus court chemin de 1 à tout autre sommet i . On peut parcourir le plus court chemin de 1 à i en construisant la liste inverse des prédécesseurs i de H .

Partie D. Recherche d'un arbre de poids extrémum

1. Présentation des objectifs

Soit un graphe $G(X, U)$. A chaque arc $u \in U$, on associe un nombre $w(u)$ appelé le *poids* de l'arc u . Pour tout graphe partiel $G'(X, U')$ avec $U' \subset U$ de G , on définit le *poids* de G' comme le nombre :

$$w(G') = \sum_{u' \in U'} w(u')$$

On suppose par la suite que G est *connexe* [1] On recherche un arbre de poids *maximum* (respectivement *minimum*) comme étant un arbre \mathcal{T}^* (X, T) de G tel que :

[1 sinon on appliquera l'algorithme à chaque composante connexe prise séparément.]

$$w(\mathcal{T}^*) = \max_{\forall \mathcal{T} \text{ arbre de } G} (w(\mathcal{T})) \left(\text{respectivement } w(\mathcal{T}^*) = \min_{\forall \mathcal{T} \text{ arbre de } G} (w(\mathcal{T})) \right)$$

2. Algorithme de Kruskal 1956

Structure de données :

On crée une liste $(Lu_k)_{1 \leq k \leq |U|}$ d'arcs triés dans l'ordre des poids *décroissants* :

$$1 \leq k \leq k' \leq |U| \Rightarrow w(Lu_k) \geq w(Lu_{k'})$$

$$(\text{ respectivement croissants : } 1 \leq k \leq k' \leq |U| \Rightarrow w(Lu_k) \leq w(Lu_{k'}))$$

On connaît bien sûr pour chaque arc les numéros de ses extrémités [1]. Soit k une variable de type rang prenant ses valeurs dans l'intervalle $[1, |U|]$

[1 On peut par exemple créer la matrice SIF donnant pour chaque arc son sommet initial et son sommet final (Cf. Partie Matrices associées à un graphe).]

Initialisation :

$T \leftarrow \{ Lu_1 \}$; on a déjà utilisé Lu_1 donc $k \leftarrow 2$;

Itérations :

tant que $(k \leq |U|)$

si Lu_k "ne forme pas de cycle avec les arcs de " *alors* l'arc Lu_k est conservé

$T \leftarrow T \cup \{ Lu_k \}$

fin "si"

$k \leftarrow k + 1$;

fin "tant que"

Arrêt des itérations :

$|T| \geq 1$ et $\mathfrak{J}(X, T)$ est un arbre de poids *maximum* (respectivement *minimal*).

Problèmes Hamiltonien et Eulérien

Partie A. Problème Hamiltonien

1. Définitions



Soit $G(X, U)$ un graphe connexe d'ordre $N = |X|$. On appelle *chemin hamiltonien* (*chaîne hamiltonienne*), un chemin (une chaîne) passant une fois et une seule par chacun des sommets de G . Un chemin hamiltonien (une chaîne hamiltonienne) est donc élémentaire et de longueur $N - 1$.

Un *circuit hamiltonien* (un *cycle hamiltonien*) est un circuit (un cycle) qui passe une fois et une seule par chacun des sommets de G . Un cycle hamiltonien est donc élémentaire de longueur N .

Un graphe non orienté est un *graphe hamiltonien (non orienté)* s'il contient un cycle hamiltonien. Un graphe (orienté) est un *graphe hamiltonien (orienté)* s'il contient un circuit hamiltonien.

Problème :

On ne connaît pas de solution polynomiale pour la recherche d'un cycle hamiltonien : cette recherche est donc très difficile. De plus, il n'existe pas de condition à la fois nécessaire et suffisante pour l'existence d'un cycle hamiltonien. En outre, s'il existe de nombreux théorèmes concernant l'existence d'un cycle hamiltonien dans un graphe simple, peu de théorèmes existent pour l'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté.

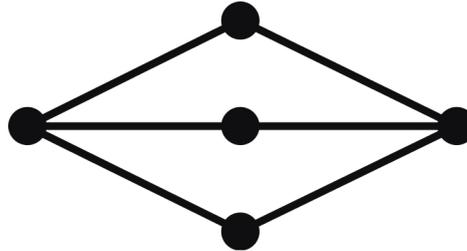
2. Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien



Conseil

une condition nécessaire évidente pour qu'un graphe non orienté soit hamiltonien est qu'il soit 2 connexe

Cette proposition n'est malheureusement pas suffisante car le graphe de la figure 20 est le graphe 2 connexe non hamiltonien ayant le plus petit nombre de sommets.



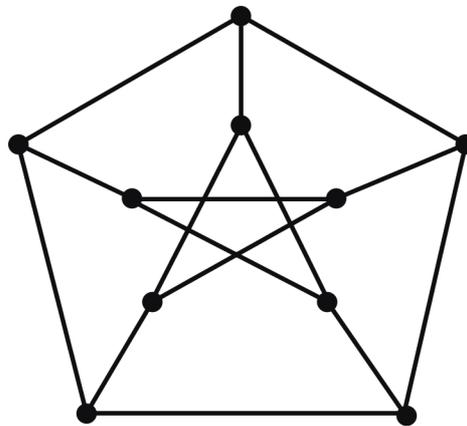
▲ SCH. 21 : LE PLUS PETIT GRAPHE 2 CONNEXE NON HAMILTONIEN



Conseil

tout graphe hamiltonien possède un 2 facteur (un arbre couvrant de degré 2)

Cette proposition n'est pas suffisante non plus car le graphe de la figure 21 appelé "graphe de Petersen" n'est pas hamiltonien.



▲ SCH. 22 : LE GRAPHE DE PETERSEN

3. Condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien

Lemme :

soit $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_k]$ un chemin d'un graphe G et soit $x \notin \mu$ un sommet de G tel que $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_i, x, x_{i+1}, \dots, x_k]$ ne soit pas un chemin pour aucun indice i . Alors le nombre d'arcs $m(x, S)$, reliant x et $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ vérifie : $m(x, S) \leq |S| + 1$

Démonstration :

Soient $A = \{ x_i/x_i \in S, i \neq k, (x_i, x) \in U \}$ et $B = \{ x_i/x_i \in S, i \neq k, (x, x_{i+1}) \in U \}$. Selon l'hypothèse du lemme, on a $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \subset S - \{x_k\}$ d'où $|A \cup B| \leq |S| - 1$.

Donc $m(x, S) \leq |A| + |B| + 2 \leq |A \cup B| + 2 \leq |S| + 1$.



Un graphe est *fortement connexe* si pour toute paire de sommets x, y de X , il existe un chemin de $\mu[x, y]$ de x à y et un chemin $\mu[y, x]$ de y à x .

Théorème de Meyniel 1973 :

soit G un 1 graphe d'ordre n , sans boucles et fortement connexe. Si pour toute paire x, y de sommet non voisins (non adjacents), on a $d_G(x) + d_G(y) \geq 2n - 1$ alors G contient un circuit hamiltonien.

Démonstration :

Supposons que la condition soit vérifiée mais qu'il n'y ait pas de cycle hamiltonien. Soient $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_k]$ le plus long circuit et $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

On suppose qu'il n'existe pas de chemin dont les extrémités sont deux points distincts de S et les autres sommets forment un ensemble non vide de $X - S$.

La forte connexité de G implique qu'il existe un circuit $[s_0, a_1, a_2, \dots, a_p, s_0]$ avec $s_0 \in S$ et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subset X - S$. Par hypothèse, aucun point de A ne peut être adjacent à un point de $S - \{s_0\}$, donc pour $a \in A, s \in S - \{s_0\}$, on a :

$$m(a, A) \leq 2|A| - 2; m(s, A) = 0; m(a, S) \leq 2; m(s, S) \leq 2|S| - 2.$$

En outre, il ne peut pas y avoir de chemin de longueur 2 entre a et s avec un sommet intermédiaire dans $X - (A \cup S)$ car ce chemin formerait un chemin interdit de S à S (avec une partie de μ) par conséquent :

$$m(a, X - (A \cup S)) + m(s, X - (A \cup S)) \leq 2|X - (A \cup S)|.$$

Donc a et s ne sont pas voisins mais $d_G(a) + d_G(s) \leq 2(|A| + |S| + |X - (A \cup S)|) - 2 \leq 2n - 2$ ce qui est contradictoire et on a nécessairement un chemin dont les extrémités sont deux points distincts de S et les autres sommets forment un ensemble non vide de $X - S$.

Soit $v = [s_1, a_1, a_2, \dots, a_p, s_2]$ avec $s_1 \in S, s_2 \in S, s_1 \neq s_2$, un chemin dont les extrémités sont deux points distincts de S avec $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subset X - S, A \neq \emptyset$ choisi de sorte que la portion $\mu[s_1, s_2]$ soit la plus courte possible. Par construction, aucun sommet de A ne peut être adjacent à $\mu[s_1, s_2] - \{s_1, s_2\} = S_1$ donc $a \in A \Rightarrow m(a, S_1) = 0$. Comme μ est le plus long circuit, le lemme indique que le sommet a vérifie $m(a, S - S_1) \leq |S - S_1| + 1$ et $m(a, A) \leq 2|A| - 2$. Soit $\bar{\mu}[s_2, s_1]$ le plus long chemin de S_2 à S_1 dont l'ensemble des sommets \bar{S} vérifie $S - S_1 \subset \bar{S} \subset S$, il existe un sommet $s \in S - \bar{S} \subset S_1$ et le lemme indique que $m(s, S - \bar{S}) \leq |S - \bar{S}| - 2$. Or un point de S_1

$m(a, X - (A \cup S)) + m(s, X - (A \cup S)) \leq 2 |X - (A \cup S)|$. En ajoutant les inégalités trouvées, on aboutit à :

$$d_G(a) + d_G(s) \leq |S - S_1| + 1 + 2 |A| - 2 + |\bar{S}| + 1 + 2 |S - \bar{S}| - 2 + 2 |X - (A \cup S)|$$

et $d_G(a) + d_G(s) \leq 2 |\bar{S}| + 2 |S - \bar{S}| + 2 |A| + 2 |X - (A \cup S)| - 2 \leq 2n - 2$

ce qui est (à nouveau) contradictoire car a et s ne sont pas voisins.

Les deux paragraphes précédents montrent l'existence d'un circuit hamiltonien.

Corollaire :

(Théorème de Ghouila Houiri 1960) si dans un 1 graphe G d'ordre n fortement connexe sans boucles, on a $\forall x \in X, d_G(x) \geq n$ alors il existe un circuit hamiltonien.

4. Condition suffisante d'existence d'un cycle hamiltonien

Théorème de Dirac (1952) :

un graphe simple $G(X, E)$ d'ordre n qui vérifie $\forall x \in X, d_G(x) \geq \frac{n}{2}$ admet un cycle hamiltonien

Ce théorème est une restriction du théorème d'Ore (1961).

Théorème d'Ore (1961) :

un graphe simple $G(X, E)$ d'ordre n tel que toute paire x, y de sommets non adjacents vérifie $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ admet un cycle hamiltonien

Démonstration

Soit G^* le graphe symétrique obtenu en remplaçant chaque arête de G par deux arcs de sens opposés, la condition d'Ore sur G devient $d_G(x) + d_G(y) \geq 2n$ pour G^* . Donc d'après le théorème de Meyniel, G^* admet un circuit hamiltonien.

Théorème de Tutte (1956) :

si un graphe planaire G est 4 connexe alors il admet un cycle hamiltonien.

Démonstration

Cf. Ore 1968

Partie B. Problème Eulérien

Le problème eulérien est un des plus vieux problèmes combinatoires comme le prouve la résolution par Euler du problème des sept ponts de Königsberg (devenue Kaliningrad).

1. Définitions



Soit $G(X, U)$ un multigraphe connexe d'ordre $N = |X|$. On appelle *chaîne eulérienne* (*cycle eulérien*), une chaîne (un cycle) utilisant une fois et une seule chacune des arêtes de G . Une chaîne eulérienne est donc simple. Un multigraphe est un *graphe eulérien* s'il contient un cycle eulérien.

2. Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une chaîne eulérienne

Théorème d'Euler (1766) :

un multigraphe G admet une chaîne eulérienne si et seulement si il est connexe (à des points isolés près) et si le nombre des sommets de degré impair est 0 ou 2.

Démonstration :

S'il existe une chaîne eulérienne μ le graphe est connexe. De plus, si les deux sommets terminaux de μ , s'ils sont distincts, sont les seuls à avoir un degré impair : il y a donc 0 ou 2 sommets de degré impair.

On suppose que la condition d'Euler est vérifiée pour tout graphe de moins de m arêtes. Soit G un graphe de m arêtes et qu'il admet deux sommets de degré impair a et b . On va définir une chaîne μ en partant de a dans une direction quelconque sans parcourir deux fois la même arête. Si on arrive en un sommet $x \neq b$, on aura utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à x , donc on pourra repartir par une arête inutilisée. Quand on ne pourra plus repartir, on sera nécessairement en b . S'il existe des arêtes non utilisées, elles permettent de définir un graphe partiel G' dont tous les sommets sont de degré pair.

Soient C_1, C_2, \dots, C_k les composantes connexes de G' admettant au moins une arête ; par hypothèse, elles admettent des cycles eulériens $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$; comme G est connexe, la chaîne μ rencontre successivement toutes les C_i en des sommets $x_i \in C_i$. Alors la chaîne $\mu[a, x_1] + \mu_1 + \mu[x_2, x_1] + \mu_2 + \dots + \mu[x_k, b]$ est une chaîne eulérienne.

Corollaire :

un multigraphe G admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe (à des points isolés près) et s'il n'a pas de sommet de degré impair.

3. Algorithme local pour tracer un cycle eulérien

Principe de l'algorithme :

Cet algorithme a pour objectif de *parcourir "d'un seul trait de plume" toutes les arêtes d'un multigraphe G connexe dont tous les sommets sont de degré pair.*

3 règles de parcours

- ◆ on part d'un sommet a quelconque, et l'on suit une chaîne sans jamais utiliser deux fois la même arête.
- ◆ arrivé en un sommet $x \neq a$ à la k^{ème} étape, on prendra jamais une arête qui, au moment considéré, est un isthme pour le graphe G_k engendré par les arêtes non encore utilisées (excepté si x est un sommet pendant de G_k).
- ◆ si on arrive au sommet a , on repart par une arête quelconque nouvelle si elle existe ; sans cela on s'arrête.

Le parcours obtenu est bien un cycle eulérien

On peut toujours respecter les règles énoncées précédemment. Car si l'on arrive au sommet $x \neq a$, il reste toujours dans G_k une arête incidente à x : $d_{G_k}(x)$ est pair donc $d_{G_k}(x)$ est impair. Si cette arête est unique, c'est une arête pendante de G_k , et on peut l'utiliser. Dans le cas contraire, il y a au moins une arête qui n'est pas un isthme : sinon il y a deux isthmes dans G_k reliant deux composantes connexes C et D distinctes. Dans C , il y a au moins un sommet de degré impair sinon $1 + 2 \sum_{x \in C} m_{G_k}(C, C) = \sum_{x \in C} d_{G_k}(x) \equiv 0 \pmod{2}$ ce qui est absurde. De même dans D , il y a au moins un sommet de degré impair. Or dans G_k , il n'y a, à part x , qu'un seul sommet de degré impair (le sommet a) d'où la contradiction et l'existence d'une arête qui n'est pas un isthme.

Si l'on respecte ces règles, le parcours effectué jusqu'à l'étape k est le début d'un cycle eulérien. En effet, le graphe G_k est connexe (à des points isolés près). Si l'on arrive en $x \neq a$, il y a dans G_k seulement deux sommets de degré impair, x et a , et d'après le théorème 1, les arêtes de G_k peuvent former une chaîne eulérienne allant de x à a .

4. Lien entre problème eulérien et hamiltonien



Conseil

un graphe eulérien sans subdivision est hamiltonien mais la réciproque est évidemment fausse.

Coloration

Partie A. Définitions



On définit deux types de *coloration* : *coloration des sommets* et *coloration des arêtes*. La coloration des sommets (respectivement des arêtes) d'un *multigraphe* G correspond à l'affectation à chacun des sommets (respectivement des arêtes) de telle sorte que deux sommets (respectivement arêtes) adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur.

Un graphe est dit *p-chromatique* si ses sommets admettent une coloration en p couleurs. On appellera *nombre chromatique* $\gamma(G)$ (respectivement *indice chromatique* $q(G)$) le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaires pour effectuer une coloration des sommets (respectivement des arêtes) de G .

Partie B. Coloration des sommets



Un sous ensemble de sommets de X est un *ensemble stable* s'il ne comprend que des sommets non voisins deux à deux. On appelle *nombre de stabilité* $\alpha(G)$ le cardinal maximum d'un sous ensemble stable. Une coloration des sommets est donc une partition des sommets en sous ensembles stables.

Propriété :

$$\gamma(G) \geq \frac{|X|}{\alpha(G)}$$

Dans une coloration, chaque sous ensemble de sommets de même couleur a un cardinal inférieur ou égal à $\alpha(G)$ d'où : $\alpha(G) \gamma(G) \geq |X|$ et la formule annoncée.

Partie C. Coloration des arêtes



Soit un multigraphe G sans boucles. On appelle de G le plus petit entier q qui a la propriété suivante : il est possible avec q couleurs de colorier les arêtes de G de sorte que deux arêtes adjacentes ne soient pas de la même couleur. Une *coloration des arêtes* est une partition de l'ensemble des arêtes en classes qui sont des couplages.

Propriétés

$$q(G) \geq \max_{x \in X} (d_G(x))$$

Partie D. Propositions

Propriété :

$$\text{soit un multigraphe } G, \gamma(G) \leq \max_{x \in X} (d_G(x)) + 1$$

Cette propriété se montre par récurrence sur l'ordre du graphe G . Elle est vérifiée pour $|X| = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour $|X| < N$. Soit un graphe $G(X, E)$ d'ordre N alors soit un x un sommet tel que $d_G(x) = \max_{x \in X} (d_G(x))$. Soit G' le sous graphe engendré par $X - \{x\}$ alors le degré d'un sommet de G' est inférieur ou égal à $\max_{x \in X} (d_G(x))$ donc d'après l'hypothèse de récurrence $\gamma(G') \leq \max_{x \in X} (d_G(x)) + 1$. Le sommet x à au plus $\max_{x \in X} (d_G(x))$ voisins, on peut donc colorer x avec une couleur non utilisée pour ses voisins et conserver une coloration avec au plus $\max_{x \in X} (d_G(x)) + 1$ couleurs.

Théorème de Brooks (1941) :

si un multigraphe G n'est pas un cycle impair et si $G \neq K_N$

Théorème de Berge (1970) :

l'indice chromatique d'un multigraphe biparti $G(X, Y, E)$ de degré maximum h est $q(G) = h$

Partie E. Le théorème des "4 couleurs"

Théorème :

tout graphe planaire est 4chromatique

Démonstration :

ce théorème ancien n'a été démontré qu'en 1976 par Appel et Haken ...

Application :

on peut colorier toute carte de géographie avec 4 couleurs, de sorte que deux régions ayant une frontière commune soient de couleurs différentes

Démonstration :

À toute carte de géographie, on peut associer un graphe ("dual") :

- ◆ on associe un sommet à chaque région de la carte,
- ◆ on crée une arête entre deux sommets du graphe si et seulement si les deux régions correspondantes ont une frontière commune.

Toute coloration des régions correspond donc à une coloration des sommets ...

Partie F. Graphe parfait



Soient un multigraphe $G(X, E)$ et $w(G)$ est le nombre maximum de sommets d'une clique, si $\forall A \subset X, \gamma(G(A, E)) = w(G(A, E))$ alors G est un *graphe parfait*.

Chapitre

VII

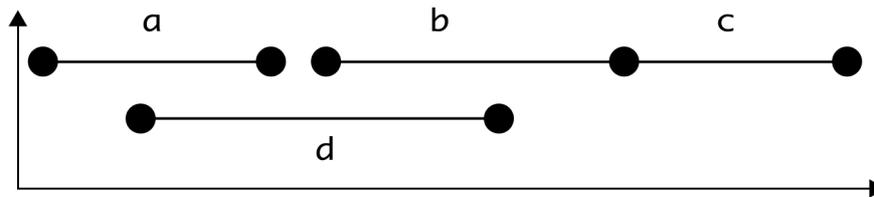
Graphe d'intervalles et graphe triangulé

Partie A. Définitions



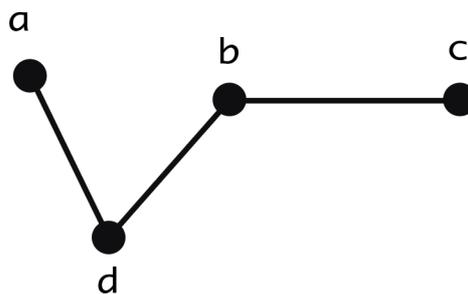
On appelle *longueur d'un cycle*, le nombre d'arcs composant le cycle. Un graphe est un *graphe triangulé* si tout cycle de longueur > 3 admet une *corde*, c'est à dire une arête reliant deux sommets non consécutifs.

Soit une famille de segments (d'intervalles) d'une même droite du plan euclidien.



▲ SCH. 23 : UN GRAPHE D'INTERVALLES

On peut former un graphe en associant un sommet à chaque segment (intervalle) et en reliant deux sommets par une arête si et seulement si les segments représentés se chevauchent. Un tel graphe est appelé un *graphe représentatif d'intervalles*.



▲ SCH. 24 : LE GRAPHE REPRÉSENTATIF D'INTERVALLES CORRESPONDANT AU GRAPHE DE LA FIGURE ANTÉRIEURE

Partie B. Propriétés

Propriété:

soit un graphe G triangulé alors chaque ensemble d'articulation minimal est une clique

Démonstration :

Il est évident qu'on assimile une clique, c'est à dire un graphe simple complet à l'ensemble de ses sommets tous reliés deux à deux par une unique arête.

Soit A un ensemble d'articulation minimal de G triangulé. Par définition, A est un ensemble (de cardinalité minimum) de sommets dont la suppression augmente le

nombre de connexité du graphe G . La suppression des sommets de A dans G crée plusieurs composantes connexes. Chaque sommet de A est adjacent à chacune de ces composantes connexes sinon A ne serait pas de cardinalité minimale.

Soient deux sommets a et b de A . On détermine la plus courte chaîne $\mu [a, c_1, c_2, \dots, c_p, b]$ avec $\forall 1 \leq i \leq p, c_i \in C$ allant de a à b avec tous les autres sommets dans une même composante connexe C . On détermine de même une chaîne $\mu' [b, c'_1, c'_2, \dots, c'_k, a]$ avec $\forall 1 \leq i \leq k, c'_i \in C'$ allant de b à a avec une autre composante connexe C' .

Le cycle $\mu + \mu'$ ne possède aucune des cordes suivantes :

- ♦ $[a, c_i]$ pour $i \neq 1$, $[c_i, c_j]$ pour $i \neq j$, $[c_i, b]$ pour $i \neq p$ sinon μ ne serait pas la plus courte chaîne ...
- ♦ $[b, c'_i]$ pour $i \neq k$, $[c'_i, c'_j]$ pour $i \neq j$, $[c'_i, a]$ pour $i \neq 1$ sinon μ' ne serait pas la plus courte chaîne ...
- ♦ $[c_i, c'_j]$ $\forall 1 \leq i \leq p, \forall 1 \leq j \leq k$ car C et C' sont deux composantes connexes distinctes de G_{X-A}

Cependant G est triangulé donc il existe une corde qui ne peut être que $[a, b]$. Par conséquent, les sommets de A sont tous voisins deux à deux et A est une clique (engendre une clique).

Propriété :

un graphe représentatif d'intervalles est triangulé

Démonstration :

Soit un graphe G un graphe représentatif d'intervalles. Si le cycle $\mu [x_1, x_2, \dots, x_p, x_1]$ n'admet pas de corde, alors les sommets de ce cycle représentent des intervalles I_k tels que I_{k-2} et I_k ne se chevauchent pas. Donc les extrémités sont strictement ordonnées mais alors l'intervalle I_1 ne peut pas chevaucher l'intervalle I_p et il ne peut pas exister d'arête $[x_p, x_1]$ pour fermer le cycle. Par conséquent, le graphe est triangulé.

Hypergraphe

Partie A. Définitions



Dans de nombreux problèmes, la notion de graphe est restrictive car limitée à des relations binaires sur les ensembles. La notion de graphe est alors généralisée à la notion d'hypergraphe.

Soit un ensemble fini $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Un *hypergraphe* sur X est une famille $H = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ de parties de X avec :

♦ $E_i \neq \emptyset \quad (1 \leq i \leq m)$

♦ $\bigcup_{1 \leq i \leq m} E_i = X$

Les éléments sont appelés les *sommets* et les ensembles E_i les *arêtes*.

Lien avec les graphes :

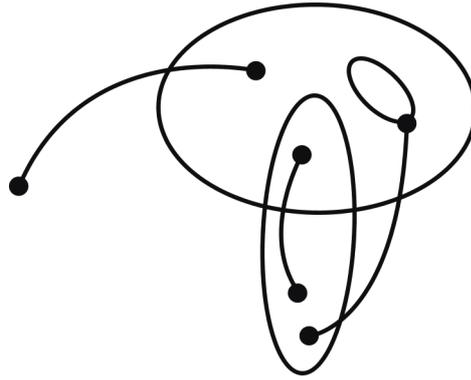
Un graphe simple est un hypergraphe simple dont toutes les arêtes sont de cardinalité 2. Un multigraphe (avec des arêtes répétées ou des boucles) est un hypergraphe dont les arêtes sont de cardinalité ≤ 2 .

Néanmoins on ne considère pas ici comme "sommets" les points isolés du graphe.

Représentation :

Un hypergraphe H est représenté en dessinant sur le plan des points représentant les sommets. L'arête E_i sera représenté par un trait continu joignant ses deux éléments si $|E_i| = 2$; par une boucle si $|E_i| = 1$; ou par un trait plein entourant ses éléments si $|E_i| \geq 3$.

A l'instar des graphes, on peut définir une matrice d'incidence sommets arêtes, les colonnes représentant les arêtes et les lignes les sommets : un élément de la matrice est non nul si et seulement si le sommet "appartient" à l'arête.



▲ SCH. 25 : UN EXEMPLE D'HYPERGRAPHE

Partie B. Un exemple d'application : la méthode HBDS

La méthode HBDS ["Hypergraph Based Data Structure"] inventée par le Pr. François Bouillé dans sa thèse d'état en 1977 est (comme son nom l'indique) une méthode de modélisation des données s'appuyant sur la théorie des hypergraphes.



Une *classe* est un ensemble d'éléments, appelés *objets*, qui ont des caractéristiques communes, appelées *attributs* de la classe. Les objets d'une classe peuvent également être en relation avec des objets de la même ou d'une autre classe grâce à la notion de *lien* entre classe.

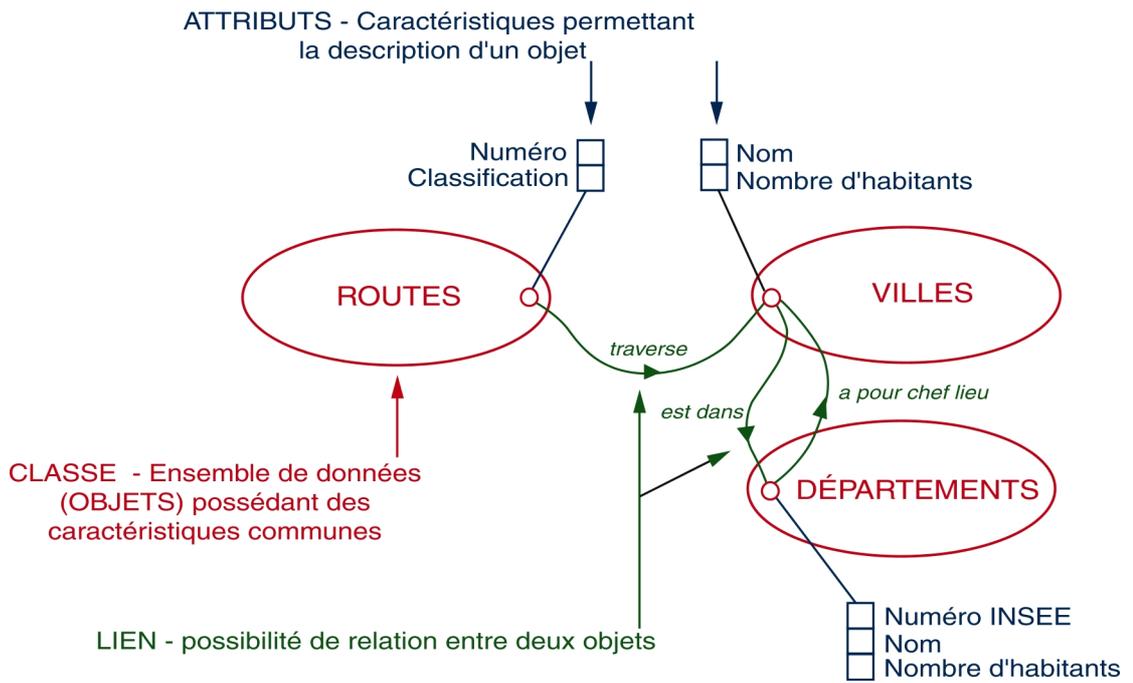
Lien avec les hypergraphes :

Un lien est donc un arc et une classe est une arête de cardinalité supérieure ou égale à 3.

Représentation :

Une classe est représentée par une ellipse. Un des foyers de l'ellipse représente un objet quelconque pour attacher les attributs et les liens de la classe. Les attributs de la classe sont représentés par des étiquettes.

Les liens entre classes sont représentés par des flèches évidées.



▲ SCH. 26 : UN EXEMPLE DE MODÈLE HBDS



Formulaire

Partie A. Formulaire

Bibliographie

BERGE C, "Graphes", Bordas, 1983.

BERGE C, "Graphes et Hypergraphes", Edition Dunod, 1970.

BERGE C, "Hypergraphes, Combinatoire des ensembles finis", Bordas, 1987.

GONDRAN M, MINOUX M, "Graphes et algorithmes", Eyrolles, 1985.

MILLEDROGUES A, TRÉVISAN J, "La Théorie des graphes, cours de M. Las Vergnas",
IGN/ENSG, 1994.

SACHE A, "", , 1974.

Signification des sigles

- **HBDS** "Hypergraph Based Data Structure"
- **PERT** "Programme Evaluation and Research Task" ou "Programme Evaluation Review Technique"
- **SIF** "Sommet Initial Sommet final"